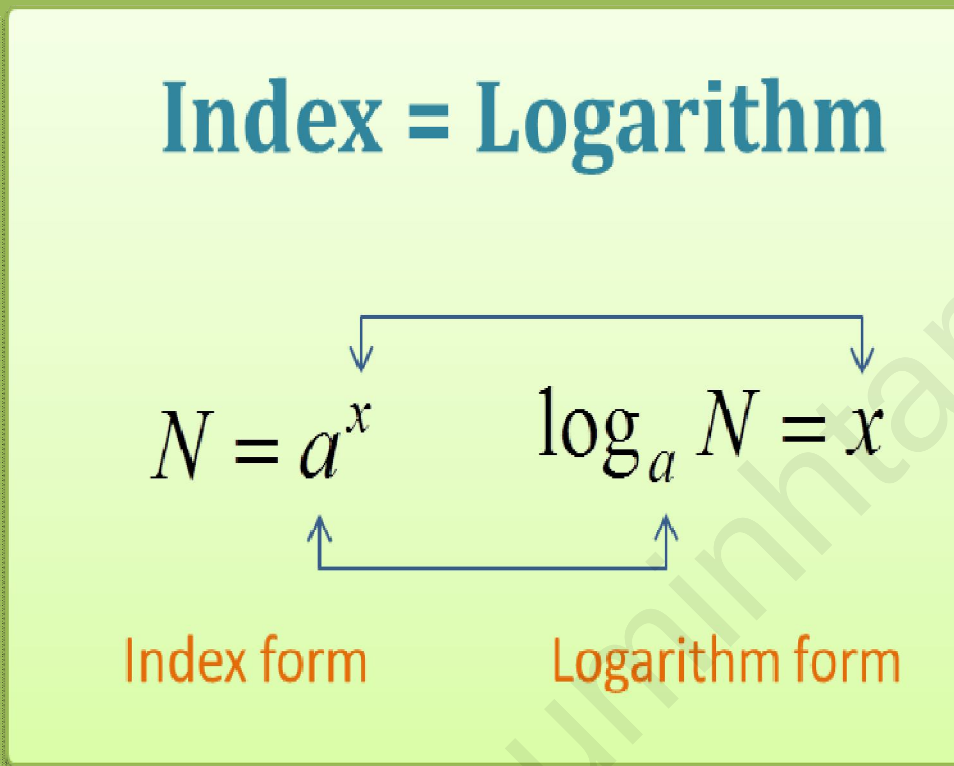
GIẢI ĐÁP TOÁN CẤP 3

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



PHẦN 1

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI (*Trang 1 – 11*)	**ĐẠO HÀM** (*Trang 13 – 16*)	**GIỚI HẠN** (*Trang 16 – 17*)	**TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC** (*Trang 18 – 43*)

PHẦN 1: HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM LÔGARIT

I. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. LŨY THỪA (Giả sử các biểu thức có nghĩa):

1) $a^0=1$ **2)** $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ **3)** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ **4)** $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha\beta}$

5) $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$ **6)** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$ **7)** $(ab)^\alpha=a^\alpha.b^\alpha$ **8)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha=\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$

Chú ý: **+) Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0.**
+) Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

A. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) A = $4^{\frac{3}{2}}+8^{\frac{2}{3}}$ **2) B =** $\sqrt{(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}}$ **3) C =** $(0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19.(-3)^{-3}$

4) D = $4^{3+\sqrt{2}}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-3-\sqrt{2}}$ **5) E =** $\dfrac{\sqrt[5]{81}.\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{9}.\sqrt{12}}{\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^3.\sqrt{18}.\sqrt[5]{27}.\sqrt{6}}$ **6) F =** $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$

<u>**Giải**</u>:

1) A = $4^{\frac{3}{2}}+8^{\frac{2}{3}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}+\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^3+2^2=12$

2) B = $\sqrt{(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{\left(5^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(2^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{5^3-2^2}=\sqrt{121}=11$

3) C = $(0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19.(-3)^{-3}=\left(2^{-1}\right)^{-4}-\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}-\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}+19.\dfrac{1}{(-3)^3}$

$$=2^4-5-\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}-\frac{19}{27}=11-\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{19}{27}=10$$

4) D = $4^{3+\sqrt{2}}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-3-\sqrt{2}}=2^{6+2\sqrt{2}}.2^{-2-2\sqrt{2}}=2^4=16$

5) E = $\dfrac{\sqrt[5]{81}.\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{9}.\sqrt{12}}{\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^3.\sqrt{18}.\sqrt[5]{27}.\sqrt{6}}=\dfrac{3^{\frac{4}{5}}.3^{\frac{1}{5}}.3^{\frac{2}{5}}.2.3^{\frac{1}{2}}}{\left(3^{\frac{1}{10}}\right)^3.3.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{5}}.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{9}{10}}}=3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6) F = $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$. Ta áp dụng hằng đẳng thức : $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$\Rightarrow F^3=6+\sqrt{\frac{847}{27}}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}+3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}.\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow F^3 = 12 + 3.\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}}.F = 12 + 5F \Leftrightarrow F^3 - 5F - 12 = 0 \Leftrightarrow (F-3)(F^2+3F+4) = 0$$

$\Leftrightarrow F = 3$ hoặc $F^2 + 3F + 4 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy **F** = 3.

Ví dụ 2: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức có nghĩa):

1) A = $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$ **2) B** = $\left(\sqrt[7]{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{35}{4}}$ **3) C** = $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right):\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}.\sqrt{\frac{a}{b}}$

4) D = $\left(1-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ **5) E** = $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2:\left(b-2b\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b^2}{a}\right)$

6) F = $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\sqrt[3]{ab}}:\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$ **7) G** = $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}}$

8) H = $\left[\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(ab)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^2$ **9) I** = $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}.\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$

Giải: 1) **A** = $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}} = \left(a^2.a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

2) **B** = $\left(\sqrt[7]{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{35}{4}} = \left\{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{1}{7}}\right\}^{\frac{35}{4}} = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-4}{5}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}$

3) **C** = $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right):\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}.\sqrt{\frac{a}{b}} = \left[\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right]:\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}.\sqrt{\frac{b}{a}}$

$$= \dfrac{a-b-a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}.\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}.\sqrt{\frac{a}{b}} = \dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right).\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{\frac{a}{b}} = 1$$

4) **D** = $\left(1-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{b}.\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{1}{b}$

5) **E** = $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2:\left(b-2b\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b^2}{a}\right) = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2:\left(\sqrt{b}-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2:\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right]^2$

$$= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.\dfrac{a}{b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$$

6) F = $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\sqrt[3]{ab}}:\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\sqrt[3]{ab}}:\dfrac{2\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}{\sqrt[3]{ab}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{ab}}.\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}=1$

7) G = $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}}=\dfrac{a\sqrt{ab}+ab-ab}{a+\sqrt{ab}}.\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}.\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}}$

$=\dfrac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}.\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}-b}=\dfrac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}.\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=a$

8) H = $\left[\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(ab)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^2=\left[\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right]\left[\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}\right]^2$

$=\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2}=1$

9) I = $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}.\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}.\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a}\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(2\sqrt[3]{b}\right)^3\right]}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}.\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}-a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\left(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+2\sqrt[3]{ab}+\left(2\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+2\sqrt[3]{ab}+\left(2\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}-a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$

B. BÀI LUYỆN

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) A = $\left(32^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}}$

2) B = $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

3) C = $\left\{\left[\left(3^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{5}{3}}\right):2^{-\frac{7}{4}}\right]:\left[4:\left(5^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{4}}.3^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$

4) D = $\left(6^{-\frac{2}{7}}\right)^{-7}+\left[(0,2)^{0,75}\right]^{-4}$

5) E = $\dfrac{(-18)^7.2^4.(-50)^3}{(-225)^4.(-4)^5.(-108)^2}$

6) F = $\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4-(0,01)^{-2}.10^{-2}}{10^{-3}:10^{-2}-(0,25)^0+10^{-2}\sqrt{(0,01)^{-3}}}$

Bài 2: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức có nghĩa):

1) A = $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

2) B = $\dfrac{a^{\sqrt{5}+3}.a^{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{\left(a^{2\sqrt{2}-1}\right)^{2\sqrt{2}+1}}$

3) C = $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$

4) D = $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$

2. LÔGARIT: Giả sử các biểu thức có nghĩa $\left(\log_a b\right.$ có nghĩa khi $\left.\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}\right)$

1) $\log_a 1 = 0$ **2)** $\log_a a = 1$ **3)** $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ **4)** $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

5) $a^{\log_a b} = b$ **6)** $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b \to \begin{cases} \log_a b^\beta = \beta \log_a b \\ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \end{cases}$

7) $\log_a b . \log_b c = \log_a c \to \begin{cases} \log_a b . \log_b a = 1 \to \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\ \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \end{cases}$

Chú ý: +) **Lôgarit thập phân** : $\log_{10} b = \log b = \lg b$

+) **Lôgarit tự nhiên (lôgarit Nêpe)** : $\log_e b = \ln b$ **(** $e \approx 2,71828$ **)**

A. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) A = $\log_3\left(\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)$ **2) B =** $\log_{\sqrt{6}} 3.\log_3 36$ **3) C =** $\log_{\frac{1}{3}} 5.\log_{25} \frac{1}{27}$

4) D = $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2\log_5 3}}$ **5) E=** $25^{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\log_{\frac{1}{5}} 27+\log_{125} 81}$ **6) F =** $\log_{3-2\sqrt{2}}\left(27^{\log_9 2} + 2^{\log_8 27}\right)$

7) G = $\lg\left(25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}\right) - e^{\ln 3}$ **8) H =** $9^{\frac{1}{\log_6 3}} + 4^{\frac{1}{\log_8 2}} - 10^{\log 99}$ **9) I =** $\lg\left(\sqrt{81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36}} + 3^{2\log_9 71}\right)$

10) J = $= 4^{1-2\log_2 \sqrt[4]{7}} - 36^{\log_6 2} + 81^{0,25-0,5\log_9 7}$ **11) K =** $\log_3(\log_2 8)$

12) L = $\log_{2013}\left\{\log_4(\log_2 256) - \log_{0,25}\left[\log_9(\log_4 64)\right]\right\}$ **13) M** $= \log_3 2.\log_4 3.\log_5 4.\log_6 5.\log_7 6.\log_8 7$

14) N $= \lg(\tan 1^0) + \lg(\tan 2^0) + ... + \lg(\tan 88^0) + \lg(\tan 89^0)$

Giải:

1) A = $\log_3\left(\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\sqrt{2}}\right) = \log_3\left(\log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{1}{6}}\right) = \log_3\left(\frac{1}{6}.\frac{2}{3}\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

2) B = $\log_{\sqrt{6}} 3.\log_3 36 = \log_{\sqrt{6}} 36 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 6^2 = 4$

3) C = $\log_{\frac{1}{3}} 5.\log_{25} \frac{1}{27} = \log_{3^{-1}} 5.\log_{5^2} 3^{-3} = (-5).\left(-\frac{3}{2}\right).\log_3 5.\log_5 3 = \frac{15}{2}$

4) D = $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2\log_5 3}} = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3\log_3 5}{2}} = 3^{\log_3 5} = 5$

5) E $= 25^{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\log_{\frac{1}{5}} 27+\log_{125} 81} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\log_{5^{-1}} 3^3+\log_{5^3} 3^4} = 5^{1-\frac{2}{3}\log_5 3+\frac{8}{3}\log_5 3} = 5^{1+2\log_5 3} = 5.5^{\log_5 3^2} = 5.9 = 45$

6) **F =** $\log_{3-2\sqrt{2}}\left(27^{\log_9 2}+2^{\log_8 27}\right)=\log_{3-2\sqrt{2}}\left[\left(3^3\right)^{\log_{3^2}2}+2^{\log_{2^3}3^3}\right]=\log_{3-2\sqrt{2}}\left(3^{\frac{3}{2}\log_3 2}+2^{\log_2 3}\right)$

$=\log_{3-2\sqrt{2}}\left(3^{\log_3 2^{\frac{3}{2}}}+2^{\log_2 3}\right)=\log_{3-2\sqrt{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}+3\right)=\log_{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}}\left(3+2\sqrt{2}\right)=-1$

7) **G =** $\lg\left(25^{\log_5 6}+49^{\log_7 8}\right)-e^{\ln 3}=\lg\left[\left(5^2\right)^{\log_5 6}+\left(7^2\right)^{\log_7 8}\right]-3=\lg\left(5^{\log_5 6^2}+7^{\log_7 8^2}\right)-3$

$=\lg\left(6^2+8^2\right)-3=\lg 10^2-3=2-3=-1$

8) **H =** $9^{\frac{1}{\log_6 3}}+4^{\frac{1}{\log_8 2}}-10^{\log 99}=\left(3^2\right)^{\log_3 6}+\left(2^2\right)^{\log_2 8}-99=3^{\log_3 6^2}+2^{\log_2 8^2}-99=6^2+8^2-99=1$

9) **I =** $\lg\left(\sqrt{81^{\log_3 5}+27^{\log_9 36}}+3^{2\log_9 71}\right)=\lg\left(\sqrt{\left(3^4\right)^{\log_3 5}+\left(3^3\right)^{\log_{3^2}6^2}}+3^{2\log_{3^2}71}\right)$

$=\lg\left(\sqrt{3^{\log_3 5^4}+3^{\log_3 6^3}}+3^{\log_3 71}\right)=\lg\left(\sqrt{5^4+6^3}+71\right)=\lg\left(29+71\right)=\lg 100=2$

10) **J** $=4^{1-2\log_2\sqrt[4]{7}}-36^{\log_6 2}+81^{0,25-0,5\log_9 7}=\left(2^2\right)^{1-2\log_2\sqrt[4]{7}}+\left(6^2\right)^{\log_6 2}+\left(3^4\right)^{0,25-\frac{1}{2}.\log_{3^2}7}$

$=\dfrac{2^2}{2^{4\log_2\sqrt[4]{7}}}+6^{\log_6 4}+\dfrac{3}{3^{\log_3 7}}=\dfrac{4}{7}-4+\dfrac{3}{7}=-3$

11) **K =** $\log_3(\log_2 8)=\log_3\left(\log_2 2^3\right)=\log_3 3=1$

12) **L =** $\log_{2013}\left\{\log_4(\log_2 256)-\log_{0,25}\left[\log_9(\log_4 64)\right]\right\}=\log_{2013}\left\{\log_4(\log_2 2^8)-\log_{0,25}\left[\log_9(\log_4 4^3)\right]\right\}$

$=\log_{2013}\left[\log_4 8-\log_{0,25}\left(\log_9 3\right)\right]=\log_{2013}\left(\log_{2^2}2^3-\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\dfrac{1}{2}\right)=\log_{2013}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\log_{2013}1=0$

13) **M** $=\log_3 2.\log_4 3.\log_5 4.\log_6 5.\log_7 6.\log_8 7=\log_8 7.\log_7 6.\log_6 5.\log_5 4.\log_4 3.\log_3 2=\log_8 2=\dfrac{1}{3}$

14) **N** $=\lg(\tan 1^0)+\lg(\tan 2^0)+...+\lg(\tan 88^0)+\lg(\tan 89^0)$

$=\left[\lg(\tan 1^0)+\lg(\tan 89^0)\right]+\left[\lg(\tan 2^0)+\lg(\tan 88^0)\right]+...+\left[\lg(\tan 44^0)+\lg(\tan 46^0)\right]+\lg(\tan 45^0)$

$=\lg\left(\tan 1^0.\tan 89^0\right)+\lg\left(\tan 2^0.\tan 88^0\right)+...+\lg\left(\tan 44^0.\tan 46^0\right)+\lg\left(\tan 45^0\right)$

$=\lg\left(\tan 1^0.\cot 1^0\right)+\lg\left(\tan 2^0.\cot 2^0\right)+...+\lg\left(\tan 44^0.\cot 44^0\right)+\lg\left(\tan 45^0\right)$

$=\lg 1+\lg 1+...+\lg 1+\lg 1=0+0+...+0+0=0$

Ví dụ 2: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

1) **A =** $\log_a\left(a^2\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a}}\right)$ 2) **B =** $\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab}b\right)\log_b a-1$

3) **C =** $\lg\left|\log_{\frac{1}{a^3}}\sqrt[5]{a\sqrt{a}}\right|$ 4) **D =** $\dfrac{\log_2\left(2a^2\right)+\left(\log_2 a\right)a^{\log_a(\log_2 a+1)}+\frac{1}{2}\log_2^2 a^4}{\log_2 a^3.(3\log_2 a+1)+1}$

Giải:

1) A = $\log_a\left(a^2\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a}}\right)=\log_a\left(a^2.\sqrt[4]{a^3.a^{\frac{1}{5}}}\right)=\log_a\left[a^2.\left(a^{\frac{16}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]=\log_a\left(a^2.a^{\frac{4}{5}}\right)=\log_a a^{\frac{14}{5}}=\frac{14}{5}$

2) B $=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1=\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+2\right)\left(\log_a b.\log_b a-\log_{ab} b.\log_b a\right)-1$

$$=\frac{\log_a^2 b+2\log_a b+1}{\log_a b}\left(1-\log_{ab} a\right)-1=\frac{\left(\log_a b+1\right)^2}{\log_a b}.\left(1-\frac{1}{\log_a ab}\right)-1$$

$$=\frac{\left(\log_a b+1\right)^2}{\log_a b}.\left(1-\frac{1}{1+\log_a b}\right)-1=\frac{\left(\log_a b+1\right)^2}{\log_a b}.\frac{\log_a b}{1+\log_a b}-1=\log_a b+1-1=\log_a b$$

3) C = $\lg\left|\log_{\frac{1}{a^3}}\sqrt[5]{a\sqrt{a}}\right|=\lg\left|\log_{\frac{1}{a^3}}\sqrt[5]{a.a^{\frac{1}{2}}}\right|=\lg\left|\log_{\frac{1}{a^3}}\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right|=\lg\left|\log_{a^{-3}}a^{\frac{3}{10}}\right|=\lg\left|-\frac{1}{10}\right|=\lg\frac{1}{10}=-1$

4) D = $\dfrac{\log_2\left(2a^2\right)+\left(\log_2 a\right)a^{\log_a\left(\log_2 a+1\right)}+\frac{1}{2}\log_2^2 a^4}{\log_2 a^3.\left(3\log_2 a+1\right)+1}=\dfrac{1+2\log_2 a+\log_2 a.\left(\log_2 a+1\right)+8\log_2^2 a}{3\log_2 a.\left(3\log_2 a+1\right)+1}$

$$=\frac{9\log_2^2 a+3\log_2 a+1}{9\log_2^2 a+3\log_2 a+1}=1$$

Ví dụ 3: Cho $\log_a b=3;\log_a c=-2$. Tính $\log_a x$ biết: **1)** $x=a^3b^2\sqrt{c}$ **2)** $x=\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$ **3)** $x=\log_a\dfrac{a^2\sqrt[3]{bc}}{\sqrt[3]{a\sqrt{c}b^3}}$

Giải: Cho $\log_a b=3$; $\log_a c=-2$

1) Với $x=a^3b^2\sqrt{c}$

$$\Rightarrow \log_a x=\log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right)=\log_a a^3+\log_a b^2+\log_a c^{\frac{1}{2}}=3+2\log_a b+\frac{1}{2}\log_a c=3+2.3+\frac{1}{2}.(-2)=8$$

2) Với $x=\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$

$$\Rightarrow \log_a x=\log_a\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}=\log_a a^4+\log_a b^{\frac{1}{3}}+\log_a c^3=4+\frac{1}{3}\log_a b+3\log_a c=4+\frac{1}{3}.3+3.(-2)=-1$$

3) Với $x=\log_a\dfrac{a^2\sqrt[3]{bc}}{\sqrt[3]{a\sqrt{c}b^3}}$

$$\Rightarrow \log_a x=\log_a\frac{a^2\sqrt[3]{bc}}{\sqrt[3]{a\sqrt{c}b^3}}=\log_a\frac{a^2b^{\frac{1}{3}}c}{a^{\frac{1}{3}}b^3c^{\frac{1}{6}}}=\log_a\frac{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{5}{6}}}{b^{\frac{8}{3}}}=\log_a a^{\frac{5}{3}}-\log_a b^{\frac{8}{3}}+\log_a c^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{8}{3}\log_a b+\frac{5}{6}\log_a c=\frac{5}{3}-\frac{8}{3}.3+\frac{5}{6}(-2)=-8$$

Ví dụ 4: Hãy biểu diễn theo *a* (hoặc cả *b* hoặc *c*) các biểu thức sau:

1) A = $\log_{20}0,16$ biết $\log_2 5=a$ **2) B** = $\log_{25}15$ biết $\log_{15}3=a$

3) C = $\log 40$ biết $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=a$ **4) D** = $\log_6(21,6)$ biết $\log_2 3=a$ và $\log_2 5=b$

5) E = $\log_{35}28$ biết $\log_{14}7=a$ và $\log_{14}5=b$ **6) F** = $\log_{25}24$ biết $\log_6 15=a$ và $\log_{12}18=b$

7) G = $\log_{125}30$ biết $\lg 3=a$ và $\lg 2=b$. **8) H** = $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}$ biết $\log_{25}7=a$ và $\log_2 5=b$.

9) I = $\log_{140}63$ biết $\log_2 3=a$; $\log_3 5=b$; $\log_2 7=c$ **10) J** = $\log_6 35$ biết $\log_{27}5=a$; $\log_8 7=b$; $\log_2 3=c$

Giải:

1) A = $\log_{20}0,16$ biết $\log_2 5=a$. Ta có: **A** = $\log_{20}0,04=\log_{20}\frac{2}{5^3}=\dfrac{\log_2\frac{2}{5^3}}{\log_2(2^2.5)}=\dfrac{1-3\log_2 5}{2+\log_2 5}=\dfrac{1-3a}{2+a}$

2) B = $\log_{25}15$ biết $\log_{15}3=a$. Ta có: $a=\log_{15}3=\dfrac{1}{\log_3(3.5)}=\dfrac{1}{1+\log_3 5}\Rightarrow \log_3 5=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}$

$$\Rightarrow \mathbf{B}=\log_{25}15=\frac{\log_3 15}{\log_3 25}=\frac{\log_3(3.5)}{\log_3 5^2}=\frac{1+\log_3 5}{2\log_3 5}=\frac{1+\frac{1-a}{a}}{2.\frac{1-a}{a}}=\frac{1}{2(1-a)}$$

3) C = $\log 40$ biết $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=a$. Ta có: $a=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=\log_{2^{\frac{1}{2}}}5^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\log_2 5\Rightarrow \log_2 5=-\frac{3a}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{C}=\log 40=\frac{\log_2 40}{\log_2 10}=\frac{\log_2(2^3.5)}{\log_2(2.5)}=\frac{3+\log_2 5}{1+\log_2 5}=\frac{3-\frac{3a}{2}}{1-\frac{3a}{2}}=\frac{6-3a}{2-3a}$$

4) D = $\log_6(21,6)$ biết $\log_2 3=a$ và $\log_2 5=b$

Ta có: $\mathbf{D}=\log_6(21,6)=\dfrac{\log_2(21,6)}{\log_2 6}=\dfrac{\log_2\frac{2^2.3^3}{5}}{\log_2(2.3)}=\dfrac{2+3\log_2 3-\log_2 5}{1+\log_2 3}=\dfrac{2+3a-b}{1+a}$

5) E = $\log_{35}28$ biết $\log_{14}7=a$ và $\log_{14}5=b$

Ta có: $a=\log_{14}7=\dfrac{1}{\log_7(2.7)}=\dfrac{1}{1+\log_7 2}\Rightarrow \log_7 2=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}$

$$b=\log_{14}5=\frac{\log_7 5}{\log_7(7.2)}=\frac{\log_7 5}{1+\log_7 2}\Rightarrow \log_7 5=b(1+\log_7 2)=b.\left(1+\frac{1-a}{a}\right)=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}=\log_{35}28=\frac{\log_7 28}{\log_7 35}=\frac{\log_7(7.2^2)}{\log_7(7.5)}=\frac{1+2\log_7 2}{1+\log_7 5}=\frac{1+2.\frac{1-a}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{2-a}{a+b}$$

6) **F** = $\log_{25}24$ biết $\log_6 15 = a$ và $\log_{12}18 = b$

Ta có: $a = \log_6 15 = \dfrac{\log_2 15}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$ (1) $\quad b = \log_{12}18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2\left(2.3^2\right)}{\log_2\left(2^2.3\right)} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow b(2 + \log_2 3) = 1 + 2\log_2 3 \Leftrightarrow (b-2)\log_2 3 = 1 - 2b \Leftrightarrow \log_2 3 = \dfrac{1-2b}{b-2}$

Từ (1) $\Rightarrow \log_2 5 = a\left(1 + \log_2 3\right) - \log_2 3 = (a-1)\log_2 3 + a = (a-1)\dfrac{1-2b}{b-2} + a = \dfrac{2b - a - ab - 1}{b-2}$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \log_{25}24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 25} = \frac{\log_2\left(2^3.3\right)}{\log_2 5^2} = \frac{3 + \log_2 3}{2\log_2 5} = \frac{3 + \dfrac{1-2b}{b-2}}{2.\dfrac{2b-a-ab-1}{b-2}} = \frac{b-5}{4b - 2a - 2ab - 2}$$

7) **G** = $\log_{125}30$ biết $\lg 3 = a$ và $\lg 2 = b$.

Ta có: $b = \lg 2 = \lg\left(\dfrac{10}{5}\right) = 1 - \lg 5 \Rightarrow \lg 5 = 1 - b \Rightarrow \mathbf{G} = \log_{125}30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 125} = \dfrac{\lg(3.10)}{\lg\left(5^3\right)} = \dfrac{1 + \lg 3}{3\lg 5} = \dfrac{1+a}{3(1-b)}$

8) **H** = $\log_{\sqrt[3]{5}}\dfrac{49}{8}$ biết $\log_{25}7 = a$ và $\log_2 5 = b$.

Ta có: $a = \log_{25}7 = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 25} = \dfrac{\log_2 7}{2\log_2 5} = \dfrac{\log_2 7}{2b} \Rightarrow \log_2 7 = 2ab$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8} = \frac{\log_2\dfrac{49}{8}}{\log_2\sqrt[3]{5}} = \frac{\log_2\dfrac{7^2}{2^3}}{\log_2 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\log_2 7 - 3}{\dfrac{1}{3}\log_2 5} = \frac{2.2ab - 3}{\dfrac{1}{3}b} = \frac{12ab - 9}{b}$$

9) **I** = $\log_{140}63$ biết $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_2 7 = c$

Ta có : $\log_2 5 = \log_2 3.\log_3 5 = ab \Rightarrow \mathbf{I} = \log_{140}63 = \dfrac{\log_2 63}{\log_2 140} = \dfrac{\log_2\left(3^2.7\right)}{\log_2\left(2^2.5.7\right)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 5 + \log_2 7} = \dfrac{2a + c}{2 + ab + c}$

10) **J** = $\log_6 35$ biết $\log_{27}5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$

$$\begin{cases} a = \log_{27}5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 27} = \dfrac{\log_2 5}{3\log_2 3} = \dfrac{\log_2 5}{3c} \Rightarrow \log_2 5 = 3ac \\ b = \log_8 7 = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 7}{3} \Rightarrow \log_2 7 = 3b \end{cases} \Rightarrow \mathbf{J} = \log_6 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3} = \frac{3ac + 3b}{1+c}$$

Ví dụ 5: Tính giá trị của biểu thức:

1) A = $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b = \sqrt{3}$.

2) B = $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$ biết $a = 2013 - \sqrt{2}$; $b = \sqrt{2} - 2012$

Giải:

1) A = $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b=\sqrt{3}$.

$$A=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}b^{\frac{1}{3}}-\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3\log_b\frac{\sqrt{b}}{a}}-\frac{1}{2\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{1}{3\left(\frac{1}{2}-\log_b a\right)}-\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\log_a b-1\right)}$$

$$=\frac{1}{3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_a b}\right)}-\frac{1}{\log_a b-2}=\frac{2\log_a b}{3(\log_a b-2)}-\frac{1}{\log_a b-2}=\frac{2\log_a b-3}{3(\log_a b-2)}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3\left(\sqrt{3}-2\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) B = $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$ biết $a=2013-\sqrt{2}$; $b=\sqrt{2}-2012$

$$B=\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(1-a\right)}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}\left(1-b^2\right)}{b^{-\frac{1}{2}}\left(1+b\right)}=\left(1+a\right)-\left(1-b\right)=a+b=2013-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2012=1$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

1) $\log_{ac}(bc)=\dfrac{\log_a b+\log_a c}{1+\log_a c}$ **2)** $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ **3)** Nếu $4a^2+9b^2=4ab$ thì $\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$

4) Nếu $a^2+4b^2=12ab$ thì $\log_{2013}(a+2b)-2\log_{2013}2=\dfrac{1}{2}(\log_{2013}a+\log_{2013}b)$

5) Nếu $a=10^{\frac{1}{1-\lg b}}$; $b=10^{\frac{1}{1-\lg c}}$ thì $c=10^{\frac{1}{1-\lg a}}$ **6)** Nếu $a=\log_{12}18$; $b=\log_{24}54$ thì: $ab+5(a-b)=1$

7) $\log_a^2\dfrac{b}{c}=\log_a^2\dfrac{c}{b}$ **8)** Trong 3 số: $\log_{\frac{a}{b}}^2\dfrac{c}{b};\log_{\frac{b}{c}}^2\dfrac{a}{c}$ và $\log_{\frac{c}{a}}^2\dfrac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn 1.

Giải:

1) $\log_{ac}(bc)=\dfrac{\log_a b+\log_a c}{1+\log_a c}$. Ta có: $\dfrac{\log_a b+\log_a c}{1+\log_a c}=\dfrac{\log_a bc}{\log_a a+\log_a c}=\dfrac{\log_a(bc)}{\log_a(ac)}=\log_{ac}(bc)$ (đpcm)

2) $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$. Đặt $a^{\log_b c}=t\Rightarrow\begin{cases}a^{\log_b c}=a^t\\ c=b^t\to c^{\log_b a}=b^{t\log_b a}=b^{\log_b a^t}=a^t\end{cases}\Rightarrow a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (đpcm)

3) Nếu $4a^2+9b^2=4ab$ thì $\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$

Ta có: $4a^2+9b^2=4ab\Leftrightarrow 4a^2+12ab+9b^2=16ab\Leftrightarrow(2a+3b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\dfrac{2a+3b}{4}\right)^2=ab$

$\Rightarrow\lg\left(\dfrac{2a+3b}{4}\right)^2=\lg(ab)\Leftrightarrow 2\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\lg a+\lg b\Leftrightarrow\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$ (đpcm)

4) Nếu $a^2+4b^2=12ab$ thì $\log_{2013}(a+2b)-2\log_{2013}2=\frac{1}{2}(\log_{2013}a+\log_{2013}b)$

Ta có: $a^2+4b^2=12ab \Leftrightarrow a^2+4ab+4b^2=16ab \Leftrightarrow (a+2b)^2=16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+2b}{4}\right)^2=ab$

$$\Rightarrow \log_{2013}\left(\frac{a+2b}{4}\right)^2=\log_{2013}(ab) \Leftrightarrow 2\left[\log_{2013}(a+2b)-2\log_{2013}2\right]=\log_{2013}a+\log_{2013}b$$

$$\Leftrightarrow \log_{2013}(a+2b)-2\log_{2013}2=\frac{1}{2}(\log_{2013}a+\log_{2013}b) \quad \text{(đpcm)}$$

5) Nếu $a=10^{\frac{1}{1-\lg b}}$; $b=10^{\frac{1}{1-\lg c}}$ thì $c=10^{\frac{1}{1-\lg a}}$

Ta có: $a=10^{\frac{1}{1-\lg b}} \Leftrightarrow \lg a=\lg 10^{\frac{1}{1-\lg b}}=\frac{1}{1-\lg b} \Leftrightarrow \lg b=1-\frac{1}{\lg a}=\frac{\lg a-1}{\lg a} \quad (1)$

$$b=10^{\frac{1}{1-\lg c}} \Leftrightarrow \lg b=\lg 10^{\frac{1}{1-\lg c}}=\frac{1}{1-\lg c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{\lg a-1}{\lg a}=\frac{1}{1-\lg c} \Leftrightarrow \lg c=1-\frac{\lg a}{\lg a-1}=\frac{1}{1-\lg a} \Rightarrow 10^{\lg c}=10^{\frac{1}{1-\lg a}} \Leftrightarrow c=10^{\frac{1}{1-\lg a}}$ (đpcm).

6) Nếu $a=\log_{12}18$; $b=\log_{24}54$ thì: $ab+5(a-b)=1$

Ta có: $a=\log_{12}18=\frac{\log_2 18}{\log_2 12}=\frac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2.3)}=\frac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3} \Rightarrow a(2+\log_2 3)=1+2\log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 3=\frac{1-2a}{a-2} \quad (1)$

$$b=\log_{24}54=\frac{\log_2 54}{\log_2 24}=\frac{\log_2(2.3^3)}{\log_2(2^3.3)}=\frac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3} \Rightarrow b(3+\log_2 3)=1+3\log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 3=\frac{1-3b}{b-3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1-2a}{a-2}=\frac{1-3b}{b-3} \Leftrightarrow (1-2a)(b-3)=(1-3b)(a-2) \Leftrightarrow ab+5(a-b)=1$ (đpcm)

7) $\log_a^2\frac{b}{c}=\log_a^2\frac{c}{b}$

Ta có : $\log_a^2\frac{b}{c}=\left(\log_a\frac{b}{c}\right)^2=\left[\log_a\left(\frac{c}{b}\right)^{-1}\right]^2=\left(-\log_a\frac{c}{b}\right)^2=\left(\log_a\frac{c}{b}\right)^2=\log_a^2\frac{c}{b}$ (đpcm)

8) Trong ba số: $\log_{\frac{a}{b}}^2\frac{c}{b};\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{a}{c}$ và $\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn 1.

Áp dụng công thức ở ý **7)** ta có: $\log_{\frac{a}{b}}^2\frac{c}{b}=\log_{\frac{a}{b}}^2\frac{b}{c}$; $\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{a}{c}=\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{c}{a}$; $\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{b}{a}=\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \log_{\frac{a}{b}}^2\frac{c}{b}.\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{a}{c}.\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{b}{a}=\log_{\frac{a}{b}}^2\frac{b}{c}.\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{c}{a}.\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{a}{b}=\left(\log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{c}.\log_{\frac{b}{c}}\frac{c}{a}.\log_{\frac{c}{a}}\frac{a}{b}\right)^2=1^2=1$$

$\Rightarrow$ Trong ba số không âm: $\log_{\frac{a}{b}}^2\frac{c}{b};\log_{\frac{b}{c}}^2\frac{a}{c}$ và $\log_{\frac{c}{a}}^2\frac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn 1.

B. BÀI LUYỆN

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) **A** = $\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}$ 2) **B** = $\log_2 8.\log_{\frac{1}{8}} 4$ 3) **C** = $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}.\log_{\frac{1}{5}}\left(5\sqrt{5}\right)$

4) **D** = $5^{3-2\log_5 4}$ 5) **E** = $9^{\frac{1}{2}\log_3 2 - 2\log_{27} 3}$ 6) **F** = $4^{\log_2 3} + 9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$

7) **G** = $\dfrac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} - 5^{\log_{125} 27}}$ 8) **H** = $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$ 9) **I** = $\dfrac{\log_3 4.\log_6 8}{\log_6 4.\log_9 8}$

10) **J** = $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$ 11) **J** = $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}.5^{\log_5 3}}$

12) **K** $= \log_6 \frac{1}{3} + \log_6 \frac{1}{12} - 27^{\log_3 5} - \sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}} 16} + 9^{\frac{1}{\log_7 3}} + 4^{\frac{1}{\log_9 2}} + \log_3 \tan\frac{\pi}{4}$

Bài 2: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

1) **A** = $\sqrt{\log_a b + \log_b a + 2}\left(\log_a b - \log_{ab} b\right)\log_b a$ 2) **B** = $\dfrac{\log_{a^3} a.\log_{\sqrt[3]{a}} a^4}{\log_{\frac{1}{a}} a^2}$

Bài 3: Hãy biểu diễn theo *a* (hoặc cả *b* hoặc *c*) các biểu thức sau:

1) **A** = $\log_{\frac{1}{2}} 28$ biết $\log_7 2 = a$ 2) **B** = $\log_6 16$ biết $\log_{12} 27 = a$. 3) **C** = $\log_{49} 32$ biết $\log_2 14 = a$

4) **D** = $\log_{54} 168$ biết $\log_7 12 = a$ và $\log_{12} 24 = b$ 5) **E** = $\log_{30} 1350$ biết $\log_{30} 3 = a$ và $\log_{30} 5 = b$

6) **F** = $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{121}{8}$ biết $\log_{49} 11 = a$ và $\log_2 7 = b$. 7) **G** = $\log_3 135$ biết $\log_2 5 = a$ và $\log_2 3 = b$.

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức:

1) **A** = $\log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b = \sqrt{5}$. 2) **B** = $c^{\log_{\sqrt{c}}\left(\log_{\sqrt{a}}\left(a\sqrt{b}\sqrt[3]{c}\right)\right)}$ biết $\log_a b = 5$ và $\log_a c = 3$

Bài 5: Chứng minh rằng (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

1) $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$

2) Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$

3) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}\left(\log_7 a + \log_7 b\right)$

4) Nếu $a^2 + 9b^2 = 10ab$ thì $\log\left(a - 3b\right) - \log 2 = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b\right)$

II. ĐẠO HÀM

1) $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}.u' \to \begin{cases}\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\\ \left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\end{cases}$

2) $\left(a^{u}\right)'=u'a^{u}\ln a \to \begin{cases}\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a\\ \left(e^{u}\right)'=u'e^{u}\\ \left(e^{x}\right)'=e^{x}\end{cases}$

3) $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a} \to \begin{cases}(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\\ (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{cases}$

Chú ý : 4) $\left(u^{v}\right)'=u^{v}.(v\ln u)'$ (**Tổng quát của (1) và (2)**)

A. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ **2)** $y=\sqrt{e^{x}}+e^{3x-1}-5^{\cos x+\sin x}$ **3)** $y=\left(x^{2}-2x+2\right)e^{x}$

4) $y=\ln\left(x^{2}+1\right)+\log_2\left(x^{2}-x+1\right)$ **5)** $y=\sqrt[3]{\ln^{2}x}$ **6)** $y=\log_2\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)$

7) $y=\log\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$ **8)** $y=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ **9)** $y=\dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt{2x-1}}$

10) $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ **11)** $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)+\log_3(\sin 2x)$ **12)** $y=\log_x(2x+1)$ **13)** $y=(2x-1)^{x+1}$

Giải:

1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}} \Rightarrow y'=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^{2}}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^{2}}}$ (áp dụng công thức $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$)

2) $y=\sqrt{e^{x}}+e^{3x-1}-5^{\cos x+\sin x}$

$$\Rightarrow y'=\frac{e^{x}}{2\sqrt{e^{x}}}+3.e^{3x-1}-(-\sin x+\cos x).5^{\cos x+\sin x}\ln 5=\frac{\sqrt{e^{x}}}{2}+3e^{3x-1}+(\sin x-\cos x).5^{\cos x+\sin x}\ln 5$$

3) $y=\left(x^{2}-2x+2\right)e^{x} \Rightarrow y'=(2x-2)e^{x}+\left(x^{2}-2x+2\right)e^{x}=x^{2}e^{x}$

4) $y=\ln\left(x^{2}+1\right)+\log_2\left(x^{2}-x+1\right) \Rightarrow y'=\dfrac{2x}{x^{2}+1}+\dfrac{2x-1}{\left(x^{2}-x+1\right)\ln 2}$

5) $y=\sqrt[3]{\ln^{2}x} \Rightarrow y'=\dfrac{2.(\ln x).\dfrac{1}{x}}{3\sqrt[3]{\ln^{4}x}}=\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{\ln x}}$

6) $y=\log_2\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right) \Rightarrow y'=\dfrac{\dfrac{8}{(x+4)^{2}}}{\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)\ln 2}=\dfrac{8}{\left(x^{2}-16\right)\ln 2}$

7) $y=\log\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y'=\dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)'}{\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln 10}=\dfrac{\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\left(1-\sqrt{x}\right)}{4x}}{\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln 10}=\dfrac{-1-\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x.\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln 10}=\dfrac{1}{2x\left(\sqrt{x}-1\right)\ln 10}$

8) $y=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}+\dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-\dfrac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$

9) $y=\dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow y'=\dfrac{\dfrac{2}{2x-1}.\sqrt{2x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}.\ln(2x-1)}{2x-1}=\dfrac{2-\ln(2x-1)}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$

10) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow y'=\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$

11) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\log_3(\sin 2x) \Rightarrow y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x\ln 3}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\cot 2x}{\ln 3}$

12) $y=\log_x(2x+1)=\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln x} \Rightarrow y'=\dfrac{\dfrac{2}{2x+1}\ln x-\dfrac{1}{x}\ln(2x+1)}{\ln^2 x}=\dfrac{2x\ln x-(2x+1)\ln(2x+1)}{x(2x+1)\ln^2 x}$

13) $y=(2x-1)^{x+1} \Rightarrow \ln y=\ln(2x-1)^{x+1}=(x+1)\ln(2x-1)$ (*)

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\ln(2x-1)+\dfrac{2(x+1)}{2x-1}$ (đạo hàm 2 vế của (*))

$\Rightarrow y'=\left[\ln(2x-1)+\dfrac{2(x+1)}{2x-1}\right].(2x-1)^{x+1}$

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

1) $y''+2y'+2y=0$ với $y=e^{-x}\sin x$

2) $xy'+1=e^y$ với $y=\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

3) $xy'=y(y\ln x-1)$ với $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$

4) $y+xy'+x^2y''=0$ với $y=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$

5) $2x^2y'=x^2y^2+1$ với $y=\dfrac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$

6) $2y=xy'+\ln y'$ với $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

<u>**Giải:**</u> **1)** $y''+2y'+2y=0$ với $y=e^{-x}\sin x$

Ta có: $y=e^{-x}\sin x \Rightarrow \begin{cases} y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x) \\ y''=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-x}\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow y''+2y'+2y=-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}(\cos x-\sin x)+2e^{-x}\sin x=0$ (đpcm)

2) $xy'+1=e^y$ với $y=\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

Ta có: $y=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\Rightarrow y'=\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}}=\frac{-1}{1+x}\Rightarrow\begin{cases}xy'+1=\frac{-x}{1+x}+1=\frac{1}{1+x}\\ e^y=e^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1}{1+x}\end{cases}\Rightarrow xy'+1=e^y$ (đpcm)

3) $xy'=y(y\ln x-1)$ với $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$. Ta có: $y=\frac{1}{1+x+\ln x}\Rightarrow y'=\frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(1+x+\ln x)^2}=\frac{-(1+x)}{x(1+x+\ln x)^2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}xy'=\frac{-(1+x)}{(1+x+\ln x)^2}\\ y(y\ln x-1)=\frac{1}{1+x+\ln x}\left(\frac{\ln}{1+x+\ln x}-1\right)=\frac{-(1+x)}{(1+x+\ln x)^2}\end{cases}\Rightarrow xy'=y(y\ln x-1)\ \text{(đpcm)}$$

4) $y+xy'+x^2y''=0$ với $y=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$

$$\text{Ta có: } y=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\Rightarrow\begin{cases}y'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)-\frac{1}{x}\sin(\ln x)=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{x}\\ y''=\frac{\left[-\frac{1}{x}\sin(\ln x)-\frac{1}{x}\cos(\ln x)\right]x-[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]}{x^2}=\frac{-2\cos(\ln x)}{x^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y+xy'+x^2y''=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+\cos(\ln x)-\sin(\ln x)-2\cos(\ln x)=0\ \text{(đpcm)}$$

5) $2x^2y'=x^2y^2+1$ với $y=\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$

$$\text{Ta có: } y'=\frac{\frac{1}{x}.x(1-\ln x)-\left[1-\ln x+x.\left(-\frac{1}{x}\right)\right](1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x+\ln x(1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x^2y'=2x^2.\frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{2(1+\ln^2 x)}{(1-\ln x)^2}\\ x^2y^2+1=x^2.\frac{(1+\ln x)^2}{x^2(1-\ln x)^2}+1=\frac{(1+\ln x)^2}{(1-\ln x)^2}+1=\frac{2(1+\ln^2 x)}{(1-\ln x)^2}\end{cases}\Rightarrow 2x^2y'=x^2y^2+1\ \text{(đpcm).}$$

6) $2y=xy'+\ln y'$ với $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$\text{Ta có: } y'=x+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=x+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}=x+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=x+\frac{2(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}}=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xy'+\ln y'=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x^2+x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ 2y=x^2+x\sqrt{x^2+1}+2\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}=x^2+x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{cases}\Rightarrow 2y=xy'+\ln y'\ \text{(đpcm)}$$

B. BÀI LUYỆN

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=\sqrt[3]{x^2-x+1}$ **2)** $y=(2x+1)e^{3x-1}$ **3)** $y=xe^{\sqrt{x}-\frac{1}{3}x}$ **4)** $y=\dfrac{2^x}{x^2-2x+2}$

5) $y=e^{3x-1}.\cos 2x$ **6)** $y=(\sin x-\cos x)e^{2x}$ **7)** $y=(1+\ln x)\ln x$ **8)** $y=\dfrac{\ln(x-1)}{x+1}$

9) $y=e^{2x}\ln(\cos x)$ **10)** $y=x^2\ln\sqrt{x^2+1}$ **11)** $y=(x^2+x)\log_2(2^x+e^{-x}-x)$ **12)** $y=\ln\left[\sin(3^x+1)\right]$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

1) $xy'=(1-x^2)y$ với $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ **2)** $y'-y=e^x$ với $y=(x+1)e^x$

3) $y'''-13y'-12y=0$ với $y=e^{4x}+2e^{-x}$ **4)** $y'\cos x-y\sin x-y''=0$ với $y=e^{\sin x}$

5) $y''-2y'+y=e^x$ với $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x$ **6)** $y'=\dfrac{2xy}{x^2+1}+e^x(x^2+1)$ với $y=(x^2+1)(e^x+2013)$

III. GIỚI HẠN

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

A. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ : Tính các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ **3)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{2x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x+3}-e^3}{2x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$ **8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\tan x}$ **9)** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$

Giải:

1) $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

Ta có: $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)^x$ Đặt : $-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{t}\Rightarrow\begin{cases}x=-(1+t)\\ x\to+\infty;\quad t\to-\infty\end{cases}$

$$\Rightarrow L_1=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-(1+t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1+t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{1.e}=\frac{1}{e}$$

2) $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{2x-1}$ Đặt $\begin{cases}\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{1}{t}\Rightarrow x=3t+2\\ x\to+\infty;\quad t\to+\infty\end{cases}$

$$\Rightarrow L_2=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t+3}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^6.\left(1+\frac{1}{t}\right)^3\right\}=e^6.1^3=e^6$$

3) $L_3=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

Đặt $t=x-e\Rightarrow\begin{cases}x=t+e\\ x\to e;\quad t\to 0\end{cases}$ $\Rightarrow L_3=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(t+e)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{t+e}{e}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)}{\dfrac{t}{e}}.\dfrac{1}{e}\right]=\dfrac{1}{e}$

4) $L_4=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\dfrac{1}{e^x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x.\dfrac{\sin x}{2x}.e^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}.\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}.\dfrac{2}{e^x}=1.\dfrac{1}{1}.\dfrac{2}{1}=2$

5) $L_5=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3.\dfrac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}.\dfrac{x^2}{2}\right]=1.0=0$

6) $L_6=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x+3}-e^3}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{5x}-1}{5x.\dfrac{2}{5}}.e^3\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{5x}-1}{5x}.\dfrac{5e^3}{2}\right)=1.\dfrac{5e^3}{2}=\dfrac{5e^3}{2}$

7) $L_7=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^x-1}{x}.\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right]=1.0=0$

8) $L_8=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{2\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}.\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}.2\cos x\right]=1.\dfrac{1}{1}.2.1=2$

9) $L_9=\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$

Đặt: $t=x-10\Rightarrow\begin{cases}x=t+10\\ x\to10;\quad t\to0\end{cases}$ $\Rightarrow L_9=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\lg(t+10)-\lg10}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\lg\left(\dfrac{t+10}{10}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)}{\dfrac{t}{10}}.\dfrac{1}{10}\right]=\dfrac{1}{10}$

B. BÀI LUYỆN

Tính các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ **2)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ **3)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

IV. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

***) Tính đơn điệu:**

1) $0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} y=a^x & : \text{Nghịch biến trên } \mathbb{R} \\ y=\log_a x & : \text{Nghịch biến trên } (0;+\infty) \end{cases}$. **2)** $a>1 \Rightarrow \begin{cases} y=a^x & : \text{Đồng biến trên } \mathbb{R} \\ y=\log_a x & : \text{Đồng biến trên } (0;+\infty) \end{cases}$.

***) Các bất đẳng thức:**

1) $0<a<1 \to \begin{cases} a^b>a^c \\ \log_a b>\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow b<c$ **2)** $a>1 \to \begin{cases} a^b>a^c \\ \log_a b>\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow b>c$

3) $\log_a b>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<b<1 \end{cases} \\ \begin{cases} a>1 \\ b>1 \end{cases} \end{array}\right.$ và $\log_a b<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1 \\ b>1 \end{cases} \\ \begin{cases} a>1 \\ 0<b<1 \end{cases} \end{array}\right.$ **4)** $0<a<b \to \begin{cases} a^\alpha<b^\alpha \Leftrightarrow \alpha>0 \\ a^\alpha>b^\alpha \Leftrightarrow \alpha<0 \end{cases}$

A. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh các cặp số sau:

1) $(0,01)^{-\sqrt{3}}$ và 1000 **2)** $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}$ **3)** $\sqrt[4]{\sqrt{3}-1}$ và $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

4) $\log_3 2$ và $\log_2 3$ **5)** $\log_2 3$ và $\log_3 11$ **6)** $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ và 1

7) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ và $0,7^{\frac{1}{3}}$ **8)** $2^{\sqrt{3}}$ và $3^{\sqrt{2}}$ **9)** $\log_{0,4}\sqrt{2}$ và $\log_{0,2}0,34$

10) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9}$ và $\frac{\sqrt{626}}{9}$ **11)** $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$ **12)** $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}$

13) $\log_{2011}2012$ và $\log_{2012}2013$ **14)** $\log_{13}150$ và $\log_{17}290$ **15)** $\log_3 4$ và $\log_{10}11$

Giải:

1) $(0,01)^{-\sqrt{3}}$ và 1000 . Ta có: $\begin{cases} (0,01)^{-\sqrt{3}}=\left(10^{-2}\right)^{-\sqrt{3}}=10^{2\sqrt{3}};\quad 1000=10^3 \\ 2\sqrt{3}>3 \end{cases} \Rightarrow (0,01)^{-\sqrt{3}}>1000$

2) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}$. Ta có: $\frac{\pi}{2}>1$ và $2\sqrt{2}<3 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\sqrt{2}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}$

3) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-1}$ và $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$. Ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{\sqrt{3}-1}=\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{1}{4}};\quad \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}=\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{1}{3}} \\ 0<\sqrt{3}-1<1;\quad \frac{1}{4}<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{\sqrt{3}-1}>\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

4) $\log_3 2$ và $\log_2 3$. Ta có: $\log_3 2<\log_3 3=1=\log_2 2<\log_2 3 \Rightarrow \log_3 2<\log_2 3$

5) $\log_2 3$ và $\log_3 11$. Ta có: $\log_2 3<\log_2 4=2=\log_3 9<\log_3 11 \Rightarrow \log_2 3<\log_2 11$

6) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ và 1 . Ta có: $\begin{cases} -\frac{\sqrt{5}}{2}<0 \\ 0<\frac{5}{7}<1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > \left(\frac{5}{7}\right)^{0} = 1$

7) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ và $0,7^{\frac{1}{3}}$. Ta có: $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} > \frac{4}{36} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{3} \\ 0<0,7<1 \end{cases} \Rightarrow 0,7^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,7^{\frac{1}{3}}$

8) $2^{\sqrt{3}}$ và $3^{\sqrt{2}}$. Ta có: $\begin{cases} \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 2^3 = 8 \\ \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{6}} > 3^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} < \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} \Rightarrow 2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$

9) $\log_{0,4}\sqrt{2}$ và $\log_{0,2}0,34$. Ta có: $\begin{cases} 0<0,4<1; \quad \sqrt{2}>1 \Rightarrow \log_{0,4}\sqrt{2}<0 \\ 0<0,2<1; \quad 0<1<0,34 \Rightarrow \log_{0,2}0,34>0 \end{cases} \Rightarrow \log_{0,4}\sqrt{2} < \log_{0,2}0,34$

10) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9}$ và $\frac{\sqrt{626}}{9}$

Ta có: $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9} = 2^{\log_2 25-\log_2 9} = 2^{\log_2\frac{25}{9}} = \frac{25}{9} = \frac{\sqrt{625}}{9} < \frac{\sqrt{626}}{9} \Rightarrow 2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}9} < \frac{\sqrt{626}}{9}$

11) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$. Ta có: $\begin{cases} \log_6 1,1>0 \Rightarrow 3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1 \\ \log_6 0,99<0 \Rightarrow 7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{\log_6 1,1} > 7^{\log_6 0,99}$

12) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}$

Ta có: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80} = \log_{3^{-1}}80^{-1} = \log_3 80 < \log_3 81 = 4 \\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}} = \log_{2^{-1}}\left(15+\sqrt{2}\right)^{-1} = \log_2\left(15+\sqrt{2}\right) > \log_2 16 = 4 \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}$

13) $\log_{2011}2012$ và $\log_{2012}2013$

Ta luôn có : $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ với $\forall n>1$ (*) . Thật vậy :

+) Ta có : $(n+1)^2 = n(n+2)+1 > n(n+2) > 1 \Rightarrow \log_{n+1}(n+1)^2 > \log_{n+1}\left[n(n+2)\right]$

hay $2 > \log_{n+1}n + \log_{n+1}(n+2)$ (1)

+) Áp dụng BĐT Cauchy ta có : $\log_{n+1}n + \log_{n+1}(n+2) > 2\sqrt{\log_{n+1}n.\log_{n+1}(n+2)}$ (2)

((2) không xảy ra dấu "=" vì $\log_{n+1}n \neq \log_{n+1}(n+2)$)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2 > 2\sqrt{\log_{n+1}n.\log_{n+1}(n+2)} \Leftrightarrow 1 > \log_{n+1}n.\log_{n+1}(n+2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{n+1}n} > \log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow \log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2) \text{ (đpcm)}$$

Áp dụng (*) với $n = 2011 \Rightarrow \log_{2011}2012 > \log_{2012}2013$

14) $\log_{13}150$ và $\log_{17}290$. Ta có: $\log_{13}150 < \log_{13}169 = 2 = \log_{17}289 < \log_{17}290 \Rightarrow \log_{13}150 < \log_{17}290$

15) $\log_3 4$ và $\log_{10}11$

Ta luôn có : $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$ với $0 < a \neq 1$ (*) .Thật vậy :…

(các bạn xem phần chứng minh ở ý **13)** hoặc cách khác ở **Ví dụ 4** ý **4)**)

Áp dụng liên tiếp (*) ta được :

$\log_3 4 > \log_4 5 > \log_5 6 > \log_6 7 > \log_7 8 > \log_8 9 > \log_9 10 > \log_{10}11$ hay $\log_3 4 > \log_{10}11$ (đpcm)

Ví dụ 2: Xác định dấu của các biểu thức sau: $\mathbf{A} = \dfrac{\log_5 3.\log_{15}4}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{14}{5}.\log_{0,3}\frac{7}{2}}$ $\mathbf{B} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5} - \sqrt[3]{\dfrac{31}{2}}$

Giải:

$$\mathbf{A} = \frac{\log_5 3.\log_{15}4}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{14}{5}.\log_{0,3}\frac{7}{2}} \quad \text{Ta có: } \begin{cases} 5>1;\ \ 3>1 \Rightarrow \log_5 3 > 0 \\ 15>1;\ \ 4>1 \Rightarrow \log_{15}4 > 0 \\ 0<\frac{1}{3}<1;\ \ \frac{14}{5}>1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{14}{5} < 0 \\ 0<0,3<1;\ \ \frac{7}{2}>1 \Rightarrow \log_{0,3}\frac{7}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\log_5 3.\log_{15}4}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{14}{5}.\log_{0,3}\frac{7}{2}} > 0$$

$\mathbf{B} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5} - \sqrt[3]{\dfrac{31}{2}}$ Ta có: $\log_6 2 - \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5 = \log_6 2 - \log_6 5 = \log_6\dfrac{2}{5}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6\frac{2}{5}} = \left(6^{-1}\right)^{\log_6\frac{2}{5}} = 6^{\log_6\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$$. Mặt khác: $\sqrt[3]{\dfrac{31}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{124}{8}}$

Mà: $\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} > \sqrt[3]{\dfrac{124}{8}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5} > \sqrt[3]{\dfrac{31}{2}} \Rightarrow \mathbf{B} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5} - \sqrt[3]{\dfrac{31}{2}} > 0$

Ví dụ 3: Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần:

1) $\sqrt{2}$; $\left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}}$; $2^{\frac{\pi}{6}}$; $2^{3^{\log_9 2}}$ **2)** $2\log_4 5$; $\log_3\dfrac{\pi}{4}$; $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; $\log_9\dfrac{1}{4}$

Giải:

1) $\sqrt{2}$; $\left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}}$; $2^{\frac{\pi}{6}}$; $2^{3^{\log_9 2}}$

Ta có: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $\left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}} = 2^{3\log_{2^6}\frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{2}\log_2\frac{5}{4}} = 2^{\log_2\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $2^{3^{\log_9 2}} = 2^{3^{\frac{1}{2}\log_3 2}} = 2^{3^{\log_3\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}}$

Mà: $\sqrt{2} > \dfrac{\pi}{6} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} > 2^{\frac{\pi}{6}} > 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3^{\log_9 2}} > 2^{\frac{\pi}{6}} > \sqrt{2}$ (1)

Mặt khác: $2 > \dfrac{5}{4} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} > \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ hay $\sqrt{2} > \left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}}$ (2)

Từ (1) và (2) : $2^{3^{\log_9 2}} > 2^{\frac{\pi}{6}} > \sqrt{2} > \left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}} \Rightarrow$ thứ tự giảm dần là: $2^{3^{\log_9 2}}$; $2^{\frac{\pi}{6}}$; $\sqrt{2}$; $\left(2^3\right)^{\log_{64}\frac{5}{4}}$

2) $2\log_4 5;\ \log_3\frac{\pi}{4};\ \log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}};\ \log_9\frac{1}{4}$

Ta có: $2\log_4 5=\log_2 5\ ;\ \log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}}=2\log_2\frac{4}{\sqrt{3}}=\log_2\frac{16}{3}\ ;\ \log_9\frac{1}{4}=\log_{3^2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_3\frac{1}{2}$

Mà: $\begin{cases}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\log_3\frac{1}{2}<\log_3\frac{\pi}{4}\\ \log_3\frac{\pi}{4}<0<\log_2 5\\ 5<\frac{16}{3}\ \Rightarrow\log_2 5<\log_2\frac{16}{3}\end{cases}\Rightarrow\log_3\frac{1}{2}<\log_3\frac{\pi}{4}<\log_2 5<\log_2\frac{16}{3}$

hay $\log_9\frac{1}{4}<\log_3\frac{\pi}{4}<2\log_4 5<\log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ thứ tự giảm dần là: $\log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}}\ ;\ 2\log_4 5\ ;\ \log_3\frac{\pi}{4}\ ;\ \log_9\frac{1}{4}$

Ví dụ 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $\frac{\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}}{2}\le\sqrt{\ln\frac{a+b}{2}}$ với $a\ge1;\ b\ge1.$

2) $\log_a b\ge\log_{a+c}b$ với $a,b>1$ và $c\ge0$

3) $\log_a b\ge\log_{a+c}(b+c)$ với $1<a\le b$ và $c\ge0$

4) $\log_a(a+1)>\log_{a+1}(a+2)$ với $0<a\ne1$

5) $a^{\log_b c}+b^{\log_c a}+c^{\log_a b}\ge3\sqrt[3]{abc}$ với a,b,c dương và khác 1.

<u>Giải</u>: **1)** $\frac{\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}}{2}\le\sqrt{\ln\frac{a+b}{2}}$ với $a\ge1;\ b\ge1.$

Vì $a\ge1;\ b\ge1$ nên $\ln a$, $\ln b$ và $\ln\frac{a+b}{2}$ không âm. Ta có :

+) $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow\ln\frac{a+b}{2}\ge\ln\sqrt{ab}\Leftrightarrow\ln\frac{a+b}{2}\ge\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$ (1)

+) $\ln a+\ln b\ge2\sqrt{\ln a\ln b}$ (áp dụng BĐT Cauchy)

$\Rightarrow2(\ln a+\ln b)\ge\ln a+\ln b+2\sqrt{\ln a\ln b}=\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)^2$ hay $\ln a+\ln b\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ln\frac{a+b}{2}\ge\frac{1}{4}\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)^2$ hay $\frac{\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}}{2}\le\sqrt{\ln\frac{a+b}{2}}$ (đpcm)

2) $\log_a b\ge\log_{a+c}b$ với $a,b>1$ và $c\ge0$

Vì $a,b>1$ và $c\ge0\Rightarrow0<\log_b a\le\log_b(a+c)\Rightarrow\frac{1}{\log_b a}\ge\frac{1}{\log_b(a+c)}\Leftrightarrow\log_a b\ge\log_{a+c}b$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi : $c=0$

3) $\log_a b\ge\log_{a+c}(b+c)$ với $1<a\le b$ và $c\ge0$

Ta có : $\log_a b\ge\log_{a+c}(b+c)\Leftrightarrow\log_a b-1\ge\log_{a+c}(b+c)-1\Leftrightarrow\log_a\frac{b}{a}\ge\log_{a+c}\frac{b+c}{a+c}$

Với $1<a\le b$ và $c\ge0\Rightarrow\frac{b}{a}\ge\frac{b+c}{a+c}\ge1$ nên $\log_a\frac{b}{a}\ge\log_a\frac{b+c}{a+c}$ (*)

Mặt khác áp dụng kết quả ý **2)** ta được : $\log_a\frac{b+c}{a+c}\ge\log_{a+c}\frac{b+c}{a+c}$ (2*)

Từ (*) và (2*) $\Rightarrow\log_a b\ge\log_{a+c}(b+c)$ (đpcm) . Dấu "=" xảy ra khi : $c=0$ hoặc $a=b$.

4) $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$ với $0 < a \neq 1$

Theo kết quả ý **3)** ta có : $\log_a b \geq \log_{a+c}(b+c)$ với $1 < a \leq b$ và $c \geq 0$

Áp dụng với $b = a+1$ và $c = 1$ ta được : $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$ (đpcm)

5) $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}$ với $\forall a,b,c > 1$

Ta có : $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow a^{\log_b c} + c^{\log_a b} = c^{\log_b a} + c^{\log_a b} \geq 2\sqrt{c^{\log_b a}.c^{\log_a b}} = 2\sqrt{c^{\log_b a + \log_a b}}$ (1)

Vì $a,b > 1$ nên áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm $\log_b a$ và $\log_a b$ ta được :

$$\log_a b + \log_b a \geq 2\sqrt{\log_a b.\log_b a} = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^{\log_b c} + c^{\log_a b} \geq 2\sqrt{c^2} = 2c$ hay $\Rightarrow a^{\log_b c} + c^{\log_a b} \geq 2c$

Chứng minh tương tự ta được : $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} \geq 2a$

$b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 2b$

$\Rightarrow 2\left(a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b}\right) \geq 2(a+b+c)$ hay $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a+b+c$ (*)

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta có : $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (2*)

Từ (*) và (2*) $\Rightarrow a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (đpcm)

Ví dụ 5: Không sử dụng máy tính hãy chứng minh rằng:

1) $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$ **2)** $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$

Giải:

1) $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được : $\log_2 3 + \log_3 2 > 2\sqrt{\log_2 3.\log_3 2} = 2$ (1)

((1) không có dấu "=" vì $\log_2 3 \neq \log_3 2$)

Ta có : $\log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 + \frac{1}{\log_2 3} - \frac{5}{2} < 0$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 3 - 5\log_2 3 + 2 < 0 \Leftrightarrow (2\log_2 3 - 1)(\log_2 3 - 2) < 0 \quad (*)$$

Mặt khác : $\begin{cases} 2\log_2 3 - 1 > 0 \\ \log_2 3 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$ (đpcm)

2) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$

Ta có : $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} = -(\log_2 3 + \log_3 2)$ (1)

Chứng minh như ý **1)** ta được : $\log_2 3 + \log_3 2 > 2 \Rightarrow -(\log_2 3 + \log_3 2) < -2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$ (đpcm)

Ví dụ 6: Chứng minh rằng các hàm số:

1) $y = f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ **2)** $y = f(x) = 3^x\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Giải:

1) $y = f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2^x \ln 2 + 2^{-x}\ln 2}{2} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y = f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (đpcm)

2) $y = f(x) = 3^x\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$

Ta có: $f'(x) = \left(3^x \ln 3\right)\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) + 3^x\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 3^x\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\ln 3 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Mà : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0 \\ \ln 3 > 1 > \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \ln 3 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số $y = f(x) = 3^x\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (đpcm)

Ví dụ 7: Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1) $f'(x) + \dfrac{1}{x} f(x) = 0$ với $f(x) = x^3 \ln x$ **2)** $f'(x) = 0$ biết $f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 5$

3) $f'(x) > g'(x)$ biết $f(x) = x + \ln(x-5)$; $g(x) = \ln(x-1)$

4) $f'(x) < g'(x)$ biết $f(x) = \dfrac{1}{2}.5^{2x+1}; g(x) = 5^x + 4x\ln 5$

Giải:

1) $f'(x) + \dfrac{1}{x} f(x) = 0$ với $f(x) = x^3 \ln x$

Điều kiện : $x > 0$ Ta có: $f(x) = x^3 \ln x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3.\dfrac{1}{x} = x^2\left(3\ln x + 1\right)$

$f'(x) + \dfrac{1}{x} f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(3\ln x + 1\right) + \dfrac{1}{x}.x^3 \ln x = 0 \Leftrightarrow x^2\left(4\ln x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $\ln x = -\dfrac{1}{4} = \ln e^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

2) $f'(x) = 0$ biết $f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 5$

Ta có: $f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x-1} - 4e^{1-2x} + 7$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x-1} - 4e^{1-2x} + 7 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x-1} - \dfrac{4}{e^{2x-1}} + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\left(e^{2x-1}\right)^2 + 7e^{2x-1} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{2x-1} = \dfrac{1}{2} \\ e^{2x-1} = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow e^{2x-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e}{2}$. Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e}{2}$

3) $f'(x) > g'(x)$ biết $f(x) = x + \ln(x-5)$; $g(x) = \ln(x-1)$

Điều kiện : $x > 5$ Ta có: $f(x) = x + \ln(x-5) \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{x-4}{x-5}$; $g(x) = \ln(x-1) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Với $x > 5$: $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{x-5} > \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-4)(x-1) > x-5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0$ (*)

Do (*) đúng với $\forall x > 5$ .Nên nghiệm của bất phương trình là: $x > 5$

4) $f'(x) < g'(x)$ biết $f(x) = \dfrac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x) = 5^x + 4x\ln 5$

Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{2}.5^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 5^{2x+1}\ln 5$; $g(x) = 5^x + 4x\ln 5 \Rightarrow g'(x) = 5^x \ln 5 + 4\ln 5 = (5^x + 4)\ln 5$

$f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow 5^{2x+1}\ln 5 < (5^x + 4)\ln 5 \Leftrightarrow 5^{2x+1} < 5^x + 4 \Leftrightarrow 5.(5^x)^2 - 5^x - 4 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5} < 5^x < 1 = 5^0 \Leftrightarrow x < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < 0$

Ví dụ 8: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1) $y = (x^2 - 4)^{\frac{\pi}{2}}$ **2)** $y = (6 - x - x^2)^{\frac{1}{3}}$ **3)** $y = \sqrt[3]{1-x}$ **4)** $y = (3^x - 9)^{-2}$

5) $y = \log_3(x^2 - 3x)$ **6)** $y = \log_{x^2-4x+4} 2012$ **7)** $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1}$

8) $y = \sqrt{\log_3\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x\right)}$ **9)** $y = 2^{\sqrt{|x-3| - |8-x|}} + \sqrt{\dfrac{-\log_{0,5}(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}}$ **10)** $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5 \dfrac{x^2+1}{x+3}\right)}$

Giải:

1) $y = (x^2 - 4)^{\frac{\pi}{2}}$. Điều kiện : $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

2) $y = (6 - x - x^2)^{\frac{1}{3}}$. Điều kiện : $6 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = (-3; 2)$

3) $y = \sqrt[3]{1-x}$ **TXĐ:** $x \in \mathbb{R}$

4) $y = (3^x - 9)^{-2}$. Điều kiện : $3^x - 9 \neq 0 \Leftrightarrow 3^x \neq 3^2 \Leftrightarrow x \neq 2$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

5) $y = \log_3(x^2 - 3x)$. Điều kiện : $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

6) $y = \log_{x^2-4x+4} 2013$. Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$

7) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1}$

Điều kiện : $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq 1 = \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < x - 3 \leq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3 < x \leq \dfrac{10}{3}$ $\Rightarrow$ **TXĐ:** $D = \left(3; \dfrac{10}{3}\right]$

8) $y = \sqrt{\log_3\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x\right)}$

Điều kiện : $\log_3\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq x - 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x-3<0 \\ x^2-3x+2\geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-3\geq 0 \\ x^2-3x+2\geq (x-3)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\geq \dfrac{7}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ 2\leq x<3 \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow \textbf{TXĐ: } D=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$$

9) $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}+\sqrt{\dfrac{-\log_{0,5}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-8}}}$ Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l} |x-3|-|8-x|\geq 0 \\ \dfrac{-\log_{0,5}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-8}}\geq 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-3|\geq |8-x| \\ x^2-2x-8>0 \\ \log_{0,5}(x-1)\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-3)^2\geq (8-x)^2 \\ x^2-2x-8>0 \\ x-1\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq \dfrac{11}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>4 \end{array}\right. \\ x\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq \frac{11}{2} \Rightarrow \textbf{TXĐ: } x\geq \frac{11}{2}$$

10) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)}$. Đkiện : $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow 0<\log_5\dfrac{x^2+1}{x+3}\leq 1 \Leftrightarrow \log_5 1<\log_5\dfrac{x^2+1}{x+3}\leq \log_5 5$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{x^2+1}{x+3}\leq 5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2-x-2}{x+3}>0 \\ \dfrac{x^2-5x-14}{x+3}\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -3<x<-1 \\ x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -2\leq x\leq 7 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\leq x<-1 \\ 2<x\leq 7 \end{array}\right. \Rightarrow \textbf{TXĐ: } D=[-2;-1)\cup(2;7]$$

Ví dụ 9: Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

1) $f(x)=3^{-x+\sqrt{x}}$ **2)** $f(x)=(0,5)^{\sin^2 x}$ **3)** $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}$ **4)** $f(x)=5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}$

Giải: 1) $f(x)=3^{-x+\sqrt{x}}$ **Cách 1**: Ta có: $-x+\sqrt{x}=-\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}=-\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow f(x)=3^{-x+\sqrt{x}}\leq 3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}\Rightarrow \max f(x)=\sqrt[4]{3} \text{ khi } x=\frac{1}{4}$$

Cách 2: Đk: $x\geq 0$ Ta có: $f'(x)=\left(-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)3^{-x+\sqrt{x}}\ln 3=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.3^{-x+\sqrt{x}}\ln 3=0\Leftrightarrow 1-2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3^{x-\sqrt{x}}}=0$ $\Rightarrow$ bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt[4]{3}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có: $\max f(x)=\sqrt[4]{3}$ khi $x=\dfrac{1}{4}$

2) $f(x)=(0,5)^{\sin^2 x}$

Cách 1: $0\le \sin^2 x\le 1 \Rightarrow 0,5^0 \ge 0,5^{\sin^2 x}\ge 0,5^1 \Leftrightarrow 1\ge f(x)\ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=1 \quad khi \quad x=k\pi \\ \min f(x)=\dfrac{1}{2} \quad khi \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

Cách 2: Đặt $t=\sin^2 x$ với $t\in[0;1] \Rightarrow f(x)=0,5^t=g(t)$ với $t\in[0;1]$

Ta có: $g'(t)=0,5^t\ln 0,5=-0,5^t\ln 2<0$ với $\forall t\in[0;1] \Rightarrow$ hàm số nghịch biến với $\forall t\in[0;1]$

$\Rightarrow 0\le t\le 1 \Rightarrow g(0)\ge g(t)\ge g(1) \Leftrightarrow 1\ge g(t)\ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=1 \quad khi \quad x=k\pi \\ \min f(x)=\dfrac{1}{2} \quad khi \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

3) $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}$

Cách 1: Ta có: $f'(x)=2^{x-1}\ln 2-2^{3-x}\ln 2=\left(2^{x-1}-2^{3-x}\right)\ln 2=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^{3-x} \Leftrightarrow x-1=3-x \Leftrightarrow x=2$

Mà: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^{x-1}+2^{3-x}\right)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{x-1}+2^{3-x}\right)=+\infty \Rightarrow$ bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \min f(x)=4$ khi $x=2$

Cách 2: Ta có: $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}\ge 2\sqrt{2^{x-1}.2^{3-x}}=4$. Dấu "=" xảy ra khi: $2^{x-1}=2^{3-x} \Leftrightarrow x-1=3-x \Leftrightarrow x=2$

$\Rightarrow \min f(x)=4$ khi $x=2$

4) $f(x)=5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}$

Cách 1: Đặt $t=\sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x=1-t \\ t\in[0;1] \end{cases} \Rightarrow f(x)=5^t+5^{1-t}=g(t)$ với $t\in[0;1]$

Ta có: $g'(t)=5^t\ln 5-5^{1-t}\ln 5=\left(5^t-5^{1-t}\right)\ln 5=0 \Leftrightarrow 5^t=5^{1-t} \Leftrightarrow t=1-t \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Mà: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(t)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^t-5^{1-t}\right)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^t-5^{1-t}\right)=+\infty \Rightarrow$ bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \min f(x)=2\sqrt{5}$ khi $t=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$

Cách 2: Ta có: $f(x)=5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}\ge 2\sqrt{5^{\sin^2 x}.5^{\cos^2 x}}=2\sqrt{5^{\sin^2 x+\cos^2 x}}=2\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi: $5^{\sin^2 x}=5^{\cos^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$\Rightarrow \min f(x)=2\sqrt{5}$ khi $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 10: Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

1) $f(x)=e^{2-3x}$ trên đoạn $[0;2]$.

2) $f(x)=e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$.

3) $f(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$ trên đoạn $[-1;1]$.

4) $f(x)=\ln(x^2-x+1)$ trên đoạn $[1;3]$.

5) $f(x)=e^x(x^2-x-1)$ trên đoạn $[0;3]$.

6) $f(x)=x-e^{2x}$ trên đoạn $[-1;0]$.

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4\ln(3-x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

8) $f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$ **(TN – 2009)**

9) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^3\right]$.

10) $f(x)=x^2\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e};e^2\right]$.

11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$ trên đoạn $[e;e^2]$.

12) $f(x)=27^x-9^x-8.3^x-1$ trên đoạn $[0;1]$.

13) $f(x)=\log^2 x-4\log x+3$ trên $[10;1000]$.

14) $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$ trên đoạn $[1;2]$ **(TN – 2013)**

Giải:

1) $f(x)=e^{2-3x}$ trên đoạn $[0;2]$. Ta có $f'(x)=-3e^{2-3x}<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;2]$

Với $0\le x\le 2\Leftrightarrow f(0)\ge f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow e^2\ge f(x)\ge\dfrac{1}{e^4}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=e^2 & khi\quad x=0\\ \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=\dfrac{1}{e^4} & khi\quad x=2\end{cases}$

2) $f(x)=e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$. . Ta có: $f'(x)=\left(3x^2-3\right)e^{x^3-3x+3}=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\ x=1\in[0;2]\end{array}\right.$

Mà : $\begin{cases}f(0)=e^3\\ f(1)=e\\ f(2)=e^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=e^5 & khi\quad x=1\\ \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=e & khi\quad x=2\end{cases}$

3) $f(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$ trên đoạn $[-1;1]$. Ta có : $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0\in[-1;1]$

Mà : $\begin{cases}f(-1)=1\\ f(0)=e\\ f(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=e & khi\quad x=0\\ \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=1 & khi\quad x=\pm1\end{cases}$

4) $f(x)=\ln(x^2-x+1)$ trên đoạn $[1;3]$.

<u>**Cách 1**</u> : Ta có : $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\notin[1;3]$

Mà : $\begin{cases}f(1)=0\\ f(3)=\ln 7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=\ln 7 & khi\quad x=3\\ \min\limits_{x\in[1;3]} f(x)=0 & khi\quad x=1\end{cases}$

<u>**Cách 2**</u>: Ta có : $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}>0$ với $\forall x\in[1;3]\Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall x\in[1;3]$.

Với $1\le x\le 3\Leftrightarrow f(1)\le f(x)\le f(3)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\ln 7\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=\ln 7 & khi\quad x=3\\ \min\limits_{x\in[1;3]} f(x)=0 & khi\quad x=1\end{cases}$

5) $f(x)=e^x(x^2-x-1)$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $f'(x)=e^x(x^2-x-1)+e^x(2x-1)=e^x(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[0;3]\\x=1\in[0;3]\end{array}\right.$

Mà : $\begin{cases}f(0)=-1\\f(1)=-e\\f(3)=6e^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;3]}f(x)=6e^3 \quad khi \quad x=3\\ \min\limits_{x\in[0;3]}f(x)=-e \quad khi \quad x=1\end{cases}$

6) $f(x)=x-e^{2x}$ trên đoạn $[-1;0]$.

Ta có: $f'(x)=1-2e^{2x}=0\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{2x}=e^{\ln\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\Leftrightarrow x=\frac{-\ln 2}{2}\in[-1;0]$

Mà : $\begin{cases}f(-1)=-1-\frac{1}{e^2}=-\frac{e^2+1}{e^2}\\ f\left(\frac{-\ln 2}{2}\right)=\frac{-\ln 2}{2}-e^{-\ln 2}=\frac{-\ln 2}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1+\ln 2}{2}\\ f(0)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[-1;0]}f(x)=-\frac{1+\ln 2}{2} \quad khi \quad x=\frac{-\ln 2}{2}\\ \min\limits_{x\in[-1;0]}f(x)=-\frac{e^2+1}{e^2} \quad khi \quad x=-1\end{cases}$

7) $f(x)=\frac{x^2}{2}-4\ln(3-x)$ trên đoạn $[-2;1]$. Ta có : $f'(x)=x+\frac{4}{3-x}=\frac{-x^2+3x+4}{3-x}=0\Leftrightarrow -x^2+3x+4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;1]\\x=4\notin[-2;1]\end{array}\right.$. Mà : $\begin{cases}f(-2)=2-4\ln 5\\ f(-1)=\frac{1}{2}-8\ln 2=\frac{1-16\ln 2}{2}\\ f(1)=\frac{1}{2}-4\ln 2=\frac{1-8\ln 2}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[-2;1]}f(x)=\frac{1-8\ln 2}{2} \quad khi \quad x=1\\ \min\limits_{x\in[-2;1]}f(x)=\frac{1-16\ln 2}{2} \quad khi \quad x=-1\end{cases}$

8) $f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$ **(TN – 2009)**

Ta có : $f'(x)=2x+\frac{2}{1-2x}=\frac{-4x^2+2x+2}{1-2x}=0\Leftrightarrow -4x^2+2x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\in[-2;0]\\x=1\notin[-2;0]\end{array}\right.$

Mà : $\begin{cases}f(-2)=4-\ln 5\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2=\frac{1-4\ln 2}{4}\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[-2;0]}f(x)=4-\ln 5 \quad khi \quad x=-2\\ \min\limits_{x\in[-2;0]}f(x)=\frac{1-4\ln 2}{4} \quad khi \quad x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

9) $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^3\right]$. Ta có : $f'(x)=\frac{2\ln x.\frac{1}{x}.x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=0\Leftrightarrow 2\ln x-\ln^2 x=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\\ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=e^2\end{array}\right.$ Mà : $\begin{cases}f(1)=0\\ f(e^2)=\frac{4}{e^2}\\ f(e^3)=\frac{9}{e^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[1;e^3]}f(x)=\frac{4}{e^2} \quad khi \quad x=e^2\\ \min\limits_{x\in[1;e^3]}f(x)=0 \quad khi \quad x=1\end{cases}$

10) $f(x)=x^2\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e^2\right]$. . Ta có : $f'(x)=2x\ln x-x=x(2\ln x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left[\frac{1}{e};e^2\right]\\ x=\sqrt{e}\in\left[\frac{1}{e};e^2\right]\end{array}\right. \text{. Mà : }\begin{cases}f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-1}{e^2}\\ f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{e}{2}\\ f\left(e^2\right)=2e^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{e};e^2\right]}f(x)=2e^4 \quad khi \quad x=e^2\\ \min\limits_{x\in\left[\frac{1}{e};e^2\right]}f(x)=\frac{-1}{e^2} \quad khi \quad x=\frac{1}{e}\end{cases}$$

11) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ trên đoạn $[e;e^2]$.

Ta có : $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}}{\ln x}=-\dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln x}}<0$ với $\forall x\in\left[e;e^2\right]\Rightarrow$ hàm số nghịch biến với $\forall x\in\left[e;e^2\right]$

(Có thể tính $f'(x)$ bằng cách : $f(x)=(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{3}{2}}.\frac{1}{x}=-\frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln x}}$)

<u>**Cách 1**</u> : Với $e\le x\le e^2\Rightarrow f(e)\ge f(x)\ge f(e^2)\Leftrightarrow 1\ge f(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in\left[e;e^2\right]}f(x)=1 \quad khi \quad x=e\\ \min\limits_{x\in\left[e;e^2\right]}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad khi \quad x=e^2\end{cases}$

<u>**Cách 2**</u> : Ta có : $\begin{cases}f(e)=1\\ f(e^2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in\left[e;e^2\right]}f(x)=1 \quad khi \quad x=e\\ \min\limits_{x\in\left[e;e^2\right]}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad khi \quad x=e^2\end{cases}$

12) $f(x)=27^x-9^x-8.3^x-1$ trên đoạn $[0;1]$.

Đặt $t=3^x$ với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[1;3]\Rightarrow f(x)=t^3-t^2-8t-1=g(t)$ với $t\in[1;3]$

Ta có : $g'(t)=3t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in[1;3]\\ t=-\frac{4}{3} \quad (loai)\end{array}\right.$

Mà : $\begin{cases}g(1)=-9\\ g(2)=-13\\ g(3)=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;1]}f(x)=-7 \quad khi \quad x=1\\ \min\limits_{x\in[0;1]}f(x)=-13 \quad khi \quad x=\log_3 2\end{cases}$

13) $f(x)=\log^2 x-4\log x+3$ trên $[10;1000]$.

Đặt $t=\log x$ với $x\in[10;1000]\Rightarrow t\in[1;3]\Rightarrow f(x)=t^2-4t+3=g(t)$ với $t\in[1;3]$

Ta có : $g'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\in[1;3]$

Mà : $\begin{cases}g(1)=0\\ g(2)=-1\\ g(3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{x\in[10;1000]}f(x)=0 \quad khi \quad \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=1000\end{array}\right.\\ \min\limits_{x\in[10;1000]}f(x)=0 \quad khi \quad x=100\end{cases}$

14) $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$ trên đoạn $[1;2]$ **(TN – 2013)**

Ta có: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-(\ln x+1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1-\ln x=\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x$

Mà $\begin{cases} x-\sqrt{x^2+3}<x-\sqrt{x^2}=x-|x|\le 0\Rightarrow \dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}<0 \\ -\ln x<0 \quad \forall x\in[1;2] \end{cases} \Rightarrow y'<0$ với $\forall x\in[1;2]$

Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ $\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{x\in[1;2]} y=y(1)=2 \quad khi \quad x=1 \\ \min\limits_{x\in[1;2]} y=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2 \quad khi \quad x=2 \end{cases}$

Ví dụ 11: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: **1)** $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ **2)** $4^x-m.2^x+m+3\le 0$

Giải:

1) $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ (*)

Xét hàm số : $f(x)=\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}$ với $x\le \log_3 5$ $\Rightarrow$ (*) có nghiệm khi : $\min\limits_{x\in(-\infty;\log_3 5]} f(x)\le m$

Ta có : $f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3}{2\sqrt{3^x+3}}-\dfrac{3^x\ln 3}{2\sqrt{5-3^x}}=\dfrac{3^x\ln 3\left(\sqrt{5-3^x}-\sqrt{3^x+3}\right)}{2\sqrt{\left(3^x+3\right)\left(5-3^x\right)}}=0\Leftrightarrow \sqrt{5-3^x}=\sqrt{3^x+3}\Leftrightarrow 3^x=1\Leftrightarrow x=0$

Ta có : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\log_3 5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in(-\infty;\log_3 5]} f(x)=2\sqrt{2}$. Vậy bất phương trình có nghiệm khi : $m\ge 2\sqrt{2}$

2) $4^x-m.2^x+m+3\le 0 \Leftrightarrow 4^x+3\le m\left(2^x-1\right)$ (2*)

TH1 : $x=0$ bất phương trình có dạng : $4\le 0$ (vô lí)

TH2 : $x>0\Rightarrow 2^x-1>0$. Khi đó bất phương trình có dạng: $\dfrac{4^x+3}{2^x-1}\le m$ (2*1)

TH3: $x<0\Rightarrow 2^x-1<0$. Khi đó bất phương trình có dạng: $\dfrac{4^x+3}{2^x-1}\ge m$ (2*2)

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{4^x+3}{2^x-1}$. Đặt $t=2^x\Rightarrow f(x)=\dfrac{t^2+3}{t-1}=t+1+\dfrac{4}{t-1}=g(t)$

$\Rightarrow g'(t)=1-\dfrac{4}{(t-1)^2}=0\Leftrightarrow (t-1)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-1 \end{array}\right.$

+) Với $x>0\Rightarrow t>1$ và $\lim\limits_{t\to1^+} g(t)=\lim\limits_{t\to1^+}\dfrac{t^2+3}{t-1}=+\infty$ ta có bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

(2*1) $\Leftrightarrow m\ge \min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=\min\limits_{t\in(1;+\infty)} g(t)=6$. Vậy (2*1) $\Leftrightarrow m\ge 6$ (1)

+) Với $x<0\Rightarrow 0<t<1$ và $\lim\limits_{t\to1^-} g(t)=\lim\limits_{t\to1^-}\dfrac{t^2+3}{t-1}=-\infty$ ta có bảng biến thiên:

t	0		1
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: (2*2) $\Leftrightarrow m<-3$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra bất phương trình (2*) có nghiệm khi: $\left[\begin{array}{l} m<-3\\ m\ge 6\end{array}\right.$

Ví dụ 12: Tìm m để bất phương trình:

1) $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ có nghiệm với $\forall x\in(-\infty;\log_3 5]$

2) $(m-1).4^x+2^{x+1}+m+1>0$ có nghiệm với $\forall x\in\mathbb{R}$

3) $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0$ có nghiệm với $\forall x\in[0;1]$

Giải:

1) $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ với $\forall x\in(-\infty;\log_3 5]$ (*)

Xét hàm số : $f(x)=\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}$ với $x\le\log_3 5$ $\Rightarrow$ (*) đúng với $\forall x\in(-\infty;\log_3 5]$: $\max\limits_{x\in(-\infty;\log_3 5]} f(x)\le m$

Ta có : $f'(x)=\dfrac{3^x\ln3}{2\sqrt{3^x+3}}-\dfrac{3^x\ln3}{2\sqrt{5-3^x}}=\dfrac{3^x\ln3\left(\sqrt{5-3^x}-\sqrt{3^x+3}\right)}{2\sqrt{\left(3^x+3\right)\left(5-3^x\right)}}=0\Leftrightarrow\sqrt{5-3^x}=\sqrt{3^x+3}\Leftrightarrow 3^x=1\Leftrightarrow x=0$

Ta có : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\right)=\sqrt3+\sqrt5$ $\Rightarrow$ bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\log_3 5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt3+\sqrt5$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt2$

$\Rightarrow m\ge\max\limits_{x\in(-\infty;\log_3 5]} f(x)=4$. Vậy bất phương trình đúng với $\forall x\in(-\infty;\log_3 5]$: $m\ge 4$

2) $(m-1).4^x+2^{x+1}+m+1>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ (2*)

Đặt $t=2^x$ với $t>0$. Khi đó (2*) có dạng: $(m-1)t^2+2t+m+1>0$ với $\forall t>0$

$$\Leftrightarrow m\left(t^2+1\right)>t^2-2t-1 \text{ với } \forall t>0 \Leftrightarrow m>\frac{t^2-2t-1}{t^2+1}=g(t) \text{ với } \forall t>0 \quad (2^{**})$$

$$g'(t)=\frac{2t^2+4t-2}{\left(t^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+\sqrt{2}\\ t=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

và $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2-2t-1}{t^2+1}=1\Rightarrow$ bảng biến thiên:

t	0		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên: (2**) $\Leftrightarrow m\ge 1$. Vậy bất phương trình đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi: $m\ge 1$

3) $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\ge 0$ với $\forall x\in[0;1]$ (3*)

(3*) $\Leftrightarrow m\left(\dfrac{9}{4}\right)^x-(2m+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+m\ge 0$ với $\forall x\in[0;1]$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

Khi đó (3*) trở thành: $mt^2-(2m+1)t+m\ge 0$ với $\forall t\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow m\left(t^2-2t+1\right)\ge -t \text{ với } \forall t\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow m(t-1)^2\ge -t \text{ với } \forall t\in\left[1;\frac{3}{2}\right] \quad (3^*1)$$

+) Với $t=1$ bất phương trình có dạng: $0\ge -1$ (luôn đúng)

+) Với $t\ne 1$: (3*1) $\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-t}{(t-1)^2}=g(t)$ với $\forall t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$ (3*2)

Ta có: $g'(t)=\dfrac{t+1}{(t-1)^3}>0$ với $\forall t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$ và $\lim\limits_{t\to 1^+}g(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{-t}{(t-1)^2}=-\infty$

t	1		$\frac{3}{2}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6

Ta có: (3*2) $m\ge\max\limits_{t\in\left(1;\frac{3}{2}\right]}g(t)=-6$. Vậy với $m\ge -6$ thì bất phương trình có nghiệm với $\forall x\in[0;1]$

Ví dụ 13: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $e^x \ge 1+x$ với $\forall x \ge 0$ **2)** $e^x \ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}$ với $\forall x \ge 0;\, n \in \mathbb{N}$ **3)** $e^x \ge x+1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

4) $a^x \ge 1+x\ln a+\dfrac{(x\ln a)^2}{2!}+...+\dfrac{(x\ln a)^n}{n!}$ với $\forall x \ge 0;\; a>1;\; n \in \mathbb{N}$ **5)** $\ln(1+x) < x$ với $\forall x > 0$

6) $\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right) < x$ với $\forall x > 0$ **7)** $e^x+\cos x \ge 2+x-\dfrac{x^2}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

8) $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $\forall x > 0; x \ne 1$ **9)** $\ln(x-1) < \sqrt{x-1}$ với $\forall x > 1$ **10)** $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ với $\forall x > 0$

11) $\ln(x+1) > \dfrac{2x}{x+2}$ với $\forall x > 0$ **12)** $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x}+\ln x$ với $\forall x > 0$

13) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1 \ge \sqrt{1+x^2}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ **14)** $x^x \ge \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1}$ với $\forall x \ge 1$ **15)** $a^b < b^a$ với $0<a<b<1$

16) $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b+\dfrac{1}{2^b}\right)^a$ với $a \ge b > 0$ **(D – 2007)** **17)** $\left(2^x+3^x\right)^y < \left(2^y+3^y\right)^x$ với $x>y>0$

18) $\left(\dfrac{a+c}{b+c}\right)^{b+c} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^b$ với $\forall a,b,c > 0$ và $a \ne b$. **19)** $a^a b^b c^c > abc^{\frac{a+b+c}{3}}$ với $\forall a,b,c > 0$

20) $3\left(a.2^a+b.2^b+c.2^c\right) \ge (a+b+c)\left(2^a+2^b+2^c\right)$ với $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ **21)** $\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) > \dfrac{2y}{2x+y}$ với $\forall x,y > 0$

22) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ với $0<a<b$ **23)** $x^n.\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ với $\forall x \in (0;1)$

Giải:

1) $e^x \ge 1+x$ với $\forall x \ge 0$ (1*)

$(1^*) \Leftrightarrow e^x - 1 - x \ge 0$ với $\forall x \ge 0$

Cách 1 Xét hàm số: $f(x) = e^x - 1 - x$ với $x \ge 0$. Ta có: $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(x) \ge 0$ với $\forall x \ge 0$ hay $e^x - 1 - x \ge 0$ với $\forall x \ge 0$ (đpcm)

Cách 2 (thực chất là cách trình bày khác của **Cách 1**)

Xét hàm số: $f(x) = e^x - 1 - x$ với $x \ge 0$

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 \ge 0$ với $\forall x \ge 0$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến với $\forall x \ge 0$ nên với $x \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) = 0$

hay $e^x - 1 - x \ge 0$ với $\forall x \ge 0$ (đpcm)

2) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$ với $\forall x \geq 0 ; n \in \mathbb{N}$

Xét hàm số: $f_n(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - ... - \dfrac{x^n}{n!}$.

Ta sẽ đi chứng minh: $f_n(x) \geq 0$ (*) với $\forall x \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$

+) Với $n = 1$: $f_1(x) = e^x - 1 - x \Rightarrow f_1'(x) = e^x - 1 \geq 0$ với $\forall x \geq 0$ và $f'(x) = 0$ khi $x = 0$

$\Rightarrow$ hàm số $f_1(x)$ đồng biến với $\forall x \geq 0 \Rightarrow f_1(x) \geq f_1(0) = 0$. Vậy (*) đúng với $n = 1$

+) Giả sử (*) đúng với $n = k$ hay $f_k(x) \geq 0$

+) Ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k+1$ hay $f_{k+1}(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - ... - \dfrac{x^k}{k!} - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} \geq 0$. Thật vậy:

$f_{k+1}'(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - ... - \dfrac{x^k}{k!} = f_k(x) \geq 0$ (theo giả thiết quy nạp) và $f_{k+1}'(x) = 0$ khi $x = 0$

$\Rightarrow$ hàm số $f_{k+1}(x)$ đồng biến với $\forall x \geq 0 \Rightarrow f_{k+1}(x) \geq f_{k+1}(0) = 0$. Vậy (*) đúng với $n = k+1$

Theo phương pháp quy nạp $\Rightarrow e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$ với $\forall x \geq 0 ; n \in N$ (đpcm)

3) $e^x \geq x + 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. (3*)

(3*) $\Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số: $f(x) = e^x - x - 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - x - 1\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x - 1\right) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

hay $e^x - x - 1 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ (đpcm)

4) $a^x \geq 1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} + ... + \dfrac{(x\ln a)^n}{n!}$ với $\forall x \geq 0$; $a > 1$; $n \in \mathbb{N}$

Đặt $t = x\ln a \Rightarrow a^x = e^{x\ln a} = e^t$ với $t \geq 0$

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: Chứng minh $e^t \geq 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + ... + \dfrac{t^n}{n!}$ với $\forall t \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$ (quay về ý **2)**)

5) $\ln(1+x) < x$ với $\forall x > 0$

Xét hàm số: $f(x) = \ln\left(1+x\right) - x$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} < 0$ với $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến với $\forall x > 0$ $\Rightarrow f(x) < f(0) = 0$

hay $\ln\left(1+x\right) - x < 0$ với $\forall x > 0$ (đpcm)

6) $\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)<x$ với $\forall x>0$

Xét hàm số: $f(x)=\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)-x$ với $x>0$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1+x+...+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}}-1=\dfrac{-\dfrac{x^n}{n!}}{1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}}<0$ với $\forall x>0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ nghịch biến với $\forall x>0$ $\Rightarrow f(x)<f(0)=0$ hay: $\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)<x$ với $\forall x>0$ (đpcm)

7) $e^x+\cos x\geq 2+x-\dfrac{x^2}{2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Xét hàm số: $f(x)=e^x+\cos x-2-x+\dfrac{x^2}{2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=e^x-\sin x-1+x$ và $f''(x)=e^x-\cos x+1>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ đồng biến với $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó: $\begin{cases} x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0\\ x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)=0\end{cases}$

và ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(e^x+\cos x-2-x+\dfrac{x^2}{2}\right)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(x)\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ hay $e^x+\cos x\geq 2+x-\dfrac{x^2}{2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ (đpcm)

8) $\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $\forall x>0; x\neq 1$

Xét hàm số: $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$ và $x\neq 1$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{x}-(x-1).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}<0$ với $\forall x>0; x\neq 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ nghịch biến với $\forall x>0; x\neq 1$ .Do đó:

+) Với $0<x<1$ $\Rightarrow f(x)>f(1)=0$ hay $\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow \ln x>\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (vì $x-1<0$) (1)

+) Với $x>1$ $\Rightarrow f(x)<f(1)=0$ hay $\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}<0\Leftrightarrow \ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (vì $x-1>0$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $\forall x>0; x\neq 1$ (đpcm)

9) $\ln(x-1) < \sqrt{x-1}$ với $\forall x > 1$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x-1) - \sqrt{x-1}$ với $x > 1$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x-1) - \sqrt{x-1}\right] = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left[\ln(x-1) - \sqrt{x-1}\right] = -\infty$

x	1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(x) \le 2\ln 2 - 2 < 0$

hay $\ln(x-1) < \sqrt{x-1}$ với $\forall x > 1$ (đpcm)

10) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ với $\forall x > 0$

+) Xét hàm số: $f(x) = \ln(1+x) - x$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} < 0$ với $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến với $\forall x > 0$ $\Rightarrow f(x) < f(0) = 0$

hay $\ln(1+x) - x < 0$ với $\forall x > 0$ (1)

+) Xét hàm số: $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ với $x > 0$

Ta có: $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$ với $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến với $\forall x > 0$ $\Rightarrow g(x) > g(0) = 0$

hay $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} > 0$ với $\forall x > 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ với $\forall x > 0$ (đpcm).

11) $\ln(x+1) > \dfrac{2x}{x+2}$ với $\forall x > 0$

Xét hàm số: $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{2x}{x+2}$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} > 0$ với $\forall x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến với $\forall x > 0$ $\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$

hay $\ln(x+1) > \dfrac{2x}{x+2}$ với $\forall x > 0$ (đpcm)

12) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x$ với $\forall x > 0$ .Xét hàm số: $f(x) = \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \dfrac{1}{x} - \ln x$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} + \dfrac{1-x}{x^2} = \dfrac{x^3 + (1-x)\left(\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)x^2}$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{x^2\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \text{với } x > 0$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ (1)

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \dfrac{1}{x} - \ln x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) - \dfrac{1}{x}\right] = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x) < 0$ với $\forall x > 0$ hay $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x$ với $\forall x > 0$ (đpcm)

13) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 1 \ge \sqrt{1+x^2}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số: $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 1 - \sqrt{1+x^2}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \dfrac{x\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Khi đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 1 - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1+x^2 = 1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 1 - \sqrt{1+x^2}\right] = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(x) \ge 0$ với $\forall x \in R$ hay $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 1 \ge \sqrt{1+x^2}$ với $\forall x \in R$ (đpcm)

14) $x^x \ge \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1}$ với $\forall x \ge 1$

Ta có: $x^x \ge \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x^x \ge \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow x\ln x \ge (x+1)\ln\dfrac{x+1}{2} \Leftrightarrow x\ln x - (x+1)\ln\dfrac{x+1}{2} \ge 0$

Xét hàm số: $f(x) = x\ln x - (x+1)\ln\dfrac{x+1}{2}$ với $x \ge 1$

Ta có: $f'(x) = \ln x + 1 - \ln\dfrac{x+1}{2} - 1 = \ln x - \ln\dfrac{x+1}{2} = \ln\dfrac{2x}{x+1}$ (1)

Mà: $x \ge 1 \Leftrightarrow 2x \ge x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+1} \ge 1 \Rightarrow \ln\dfrac{2x}{x+1} \ge 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f'(x) \ge 0$ với $\forall x \ge 1$ và $f'(x) = 0$ khi $x = 1 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến với $\forall x \ge 1$

$\Rightarrow f(x) \ge f(1) = 0$ hay $x\ln x - (x+1)\ln\dfrac{x+1}{2} \ge 0$ (đpcm)

15) $a^b < b^a$ với $0 < a < b < 1$

Ta có BĐT cần chứng minh: $a^b < b^a \Leftrightarrow \ln a^b < \ln b^a \Leftrightarrow b\ln a < a\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}$ với $0 < a < b < 1$

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ với $x \in (0;1)$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} > 0$ với $\forall x \in (0;1)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ đồng biến với $\forall x \in (0;1)$. Vậy với $0 < a < b < 1 \Rightarrow f(a) < f(b)$ hay $\dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}$ (đpcm).

16) $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$ với $a \ge b > 0$ **(D – 2007)**

Ta có: $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a \Leftrightarrow \dfrac{\left(4^a+1\right)^b}{2^{ab}} \le \dfrac{\left(4^b+1\right)^a}{2^{ab}} \Leftrightarrow \left(4^a+1\right)^b \le \left(4^b+1\right)^a \Leftrightarrow \ln\left(4^a+1\right)^b \le \ln\left(4^b+1\right)^a$

$$\Leftrightarrow b\ln\left(4^a+1\right) \le a\ln\left(4^b+1\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(4^a+1\right)}{a} \le \frac{\ln\left(4^b+1\right)}{b} \text{ với } a \ge b > 0$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{\ln\left(4^t+1\right)}{t}$ với $t > 0$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{\dfrac{4^t\ln 4}{4^t+1} - \ln\left(4^t+1\right)}{t^2} = \dfrac{4^t\ln 4 - \left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2} < 0$ với $\forall t > 0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến với $\forall t > 0$

Với $a \ge b > 0 \Rightarrow f(a) \le f(b) \Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(4^a+1\right)}{a} \le \dfrac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}$ (đpcm)

17) $\left(2^x+3^x\right)^y < \left(2^y+3^y\right)^x$ với $x > y > 0$

Ta có: $\left(2^x+3^x\right)^y < \left(2^y+3^y\right)^x \Leftrightarrow \left\{2^x\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]\right\}^y < \left\{2^y\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^y\right]\right\}^x \Leftrightarrow 2^{xy}\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]^y < 2^{xy}\left[1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^y\right]^x$

$$\Leftrightarrow \left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^y < \left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]^x \Leftrightarrow \ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^y < \ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]^x \Leftrightarrow y\ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right] < x\ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{x} < \frac{\ln\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]}{y} \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1+a^x\right)}{x} < \frac{\ln\left(1+a^y\right)}{y} \text{ với } a = \frac{3}{2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\ln\left(1+a^t\right)}{t}$ với $t > 0$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{\dfrac{a^t\ln a}{1+a^t}.t - \ln\left(1+a^t\right)}{t^2} = \dfrac{a^t\ln a^t - \left(1+a^t\right)\ln\left(1+a^t\right)}{\left(1+a^t\right)t^2} < 0$ với $\forall t > 0$

Vậy $f(t)$ nghịch biến với $\forall t > 0$. Nên với $x > y > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$ hay (*) đúng (đpcm).

18) $\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^{b+c} > \left(\frac{a}{b}\right)^{b}$ với $\forall a,b,c>0$ và $a\neq b$. Xét hàm số: $f(x)=\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+b}$ (*) với $x,a,b>0$

Từ (*) $\Rightarrow \ln f(x)=\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+b}=(x+b)\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{(x+b)\frac{b-a}{(x+b)^2}}{\frac{x+a}{x+b}}=\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\Rightarrow f'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\right]f(x)\quad(1)$$

Đặt $g(x)=\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\Rightarrow g'(x)=\frac{b-a}{(x+a)(x+b)}-\frac{b-a}{(x+a)^2}=-\frac{(b-a)^2}{(x+a)^2(x+b)}<0$ với $\forall x,a,b>0$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ nghịch biến với $\forall x\in(0;+\infty)$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{b-a}{x+a}\right]=0 \Rightarrow g(x)>0$ với $\forall x>0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f'(x)>0$ với $\forall x,a,b>0$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến với $\forall x\in(0;+\infty)$

Vậy với $c>0\Rightarrow f(c)>f(0)$ hay $\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^{b+c}>\left(\frac{a}{b}\right)^{b}$ (đpcm)

19) $a^ab^bc^c\geq abc^{\frac{a+b+c}{3}}$ với $\forall a,b,c>0$

$$a^ab^bc^c\geq abc^{\frac{a+b+c}{3}}\Leftrightarrow \ln\left(a^ab^bc^c\right)\geq\ln\left(abc^{\frac{a+b+c}{3}}\right)\Leftrightarrow 3(a\ln a+b\ln b+c\ln c)\geq(a+b+c)(\ln a+\ln b+\ln c)$$

Xét hàm số: $f(x)=\ln x$ luôn đồng biến với $\forall x>0$

Khi đó với $a,b,c>0$ ta luôn có: $\begin{cases}(a-b)(\ln a-\ln b)\geq 0\\(b-c)(\ln b-\ln c)\geq 0\\(c-a)(\ln c-\ln a)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ln a+b\ln b\geq a\ln b+b\ln a\\b\ln b+c\ln c\geq b\ln c+c\ln b\\c\ln c+a\ln a\geq c\ln a+a\ln c\end{cases}$

$\Rightarrow\ 2(a\ln a+b\ln b+c\ln c)\geq a(\ln b+\ln c)+b(\ln c+\ln a)+c(\ln a+\ln b)$ (*)

Cộng 2 vế của (*) với $a\ln a+b\ln b+c\ln c$ ta được:

$3(a\ln a+b\ln b+c\ln c)\geq(a+b+c)(\ln a+\ln b+\ln c)$ (đpcm)

20) $3\left(a.2^a+b.2^b+c.2^c\right)\geq(a+b+c)\left(2^a+2^b+2^c\right)$ với $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$

Xét hàm số: $f(x)=2^x$ luôn đồng biến với $x\in\mathbb{R}$

Khi đó với $a,b,c\in R$ ta luôn có: $\begin{cases}(a-b)\left(2^a-2^b\right)\geq 0\\(b-c)\left(2^b-2^c\right)\geq 0\\(c-a)\left(2^c-2^a\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.2^a+b.2^b\geq a.2^b+b.2^a\\b.2^b+c.2^c\geq b.2^c+c.2^b\\c.2^c+a.2^a\geq c.2^a+a.2^c\end{cases}$

$\Rightarrow\ 2\left(a.2^a+b.2^b+c.2^c\right)\geq a\left(2^b+2^c\right)+b(2^c+2^a)+c(2^a+2^b)$ (*)

Cộng 2 vế của (*) với $a.2^a+b.2^b+c.2^c$ ta được: $3\left(a.2^a+b.2^b+c.2^c\right)\geq(a+b+c)\left(2^a+2^b+2^c\right)$ (đpcm)

21) $\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) > \dfrac{2y}{2x+y}$ với $\forall x, y > 0$

Đặt $t = \dfrac{x+y}{x}$ với $t > 1 \Rightarrow tx = x+y \Rightarrow y = x(t-1) \Rightarrow \dfrac{2y}{2x+y} = \dfrac{2x(t-1)}{2x+x(t-1)} = \dfrac{2(t-1)}{t+1}$

Khi đó bài toán trở thành chứng minh: $\ln t > \dfrac{2(t-1)}{t+1}$ với $\forall t > 1$

Xét hàm số $f(t) = \ln t - \dfrac{2(t-1)}{t+1}$ với $t > 1$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{4}{(t+1)^2} = \dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ với $\forall t > 1 \Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall t > 1$

Với $t > 1 \Rightarrow f(t) > f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln t - \dfrac{2(t-1)}{t+1} > 0$ hay $\ln t > \dfrac{2(t-1)}{t+1}$ với $\forall t > 1$ (đpcm)

22) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ với $0 < a < b$

Ta có: $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$

Xét hàm số: $f(x) = \ln x$ với $x \in [a;b]$ ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ và $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$

Áp dụng định lý La – gơ – răng $\Rightarrow \exists c \in (a;b): \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} = \dfrac{1}{c}$ (1)

Mặt khác: $0 < a < c < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$ (đpcm)

23) $x^n.\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ với $\forall x \in (0;1)$

Ta có: $x^n.\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}} \Leftrightarrow x^{2n}(1-x) < \dfrac{1}{2ne} \Leftrightarrow 2n(1-x)x^{2n} < \dfrac{1}{e}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $2n(1-x)x^{2n} = (2n-2nx).\underbrace{x.x...x}_{2n} \le \left(\dfrac{2n-2nx+2nx}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$

Ta cần chứng minh: $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \ln\dfrac{1}{e}$

$$\Leftrightarrow (2n+1)\left[\ln(2n) - \ln(2n+1)\right] < -1 \text{ hay } \ln(2n+1) - \ln(2n) > \frac{1}{2n+1}$$

Xét hàm số: $f(x) = \ln x$ với $x \in [2n; 2n+1]$ ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ và $f(x)$ liên tục trên $[2n; 2n+1]$

Áp dụng định lý La – gơ – răng $\Rightarrow \exists c \in (2n; 2n+1): \dfrac{f(2n+1)-f(2n)}{2n+1-2n} = f'(c) \Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln(2n) = \dfrac{1}{c}$ (1)

Mặt khác: $c < 2n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2n+1}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \ln(2n+1) - \ln(2n) > \dfrac{1}{2n+1}$ (đpcm)

Ví dụ 14 .Chứng minh rằng:

1) $a^2\ln b - b^2\ln a > \ln a - \ln b$ với $0 < a < b < 1$ và $a, b \in \mathbb{R}$. **(CĐ – 2009)**:

2) $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi nào đẳng thức xảy ra. **(B – 2005)**

Giải:

1) $a^2\ln b - b^2\ln a > \ln a - \ln b \Leftrightarrow (a^2+1)\ln b > (b^2+1)\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2+1} < \frac{\ln b}{b^2+1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t^2+1}$ với $t \in (0;1)$. Ta có $f'(t) = \frac{\frac{1}{t}(t^2+1) - 2t\ln t}{(t^2+1)^2} > 0$ với $\forall t \in (0;1)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$. Khi đó $0 < a < b < 1 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$

hay $\frac{\ln a}{a^2+1} < \frac{\ln b}{b^2+1}$ (đpcm).

2) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x$

hay $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2.3^x$ (1) . Tương tự ta được: $\begin{cases} \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x & (2) \\ \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2.4^x & (3) \end{cases}$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được: $2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x\right] \geq 2\left(3^x + 4^x + 5^x\right)$

hay $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1), (2) và (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Ví dụ 15: Cho $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng: $S = f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{2}{2013}\right) + ... + f\left(\frac{2012}{2013}\right)$

Giải:

Nếu $a + b = 1$ ta có :

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a+2} + \frac{4^b}{4^b+2} = \frac{4^a\left(4^b+2\right) + 4^b\left(4^a+2\right)}{\left(4^a+2\right)\left(4^b+2\right)} = \frac{2.4^{a+b} + 2\left(4^a+4^b\right)}{4^{a+b} + 2\left(4^a+4^b\right) + 4} = \frac{8 + 2\left(4^a+4^b\right)}{8 + 2\left(4^a+4^b\right)} = 1 \ \textbf{(*)}$$

Áp dụng (*) ta được :

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{2012}{2013}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2013}\right) + f\left(\frac{2011}{2013}\right)\right] + ... + \left[f\left(\frac{1003}{2013}\right) + f\left(\frac{1004}{2013}\right)\right]$$

$$= 1 + 1 + ... + 1 = 1003$$

Vậy $S = 1003$

Ví dụ 16: Cho $a,b,c>1$ thỏa mãn: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^{\frac{3}{2}}$. Chứng minh rằng:

$$\log_{a+b}a+\log_{b+c}b+\log_{c+a}c<\frac{3}{2}$$

Giải:.

Với hai số $x,y>1$ và $z\ge 0$ ta luôn có: $\log_x y\ge\log_{x+z}(y+z)$ và dấu "=" xảy ra khi : $z=0$ hoặc $x=y$ (*)

Thật vậy: … (các bạn xem lại cách chứng minh ở **Ví dụ 4 – ý 3**)

Áp dụng (*) ta có: $\log_a(a+b)>\log_{a+c}(a+b+c)>0\Leftrightarrow\log_{a+b}a<\log_{a+b+c}(a+c)$

Tương tự ta có: $\log_{b+c}b<\log_{a+b+c}(a+b)$

$\log_{c+a}c<\log_{a+b+c}(c+b)$

$$\Rightarrow\log_{a+b}a+\log_{b+c}b+\log_{c+a}c<\log_{a+b+c}\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]=\log_{a+b+c}(a+b+c)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

Vậy $\log_{a+b}a+\log_{b+c}b+\log_{c+a}c<\frac{3}{2}$ (đpcm)

B. BÀI LUYỆN

Bài 1: Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh các cặp số sau:

1) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[3]{4}$ **2)** $\sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[5]{20}$ **3)** $\sqrt[4]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$ **4)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

5) $4^{\sqrt{5}}$ và $4^{\sqrt{7}}$ **6)** $\log_2\sqrt{5}$ và $\log_2\frac{5}{2}$ **7)** $\log_3 4$ và $\log_4\frac{1}{3}$ **8)** $\log_{\frac{5}{3}}\frac{3}{4}$ và $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2}{5}$

9) $9^{\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{8}{9}}$ và $\sqrt{5}$ **10)** $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6\frac{1}{2}}$ **11)** $\log_3 2$ và $\log_7\frac{\pi}{4}$

12) $\log_{0,1}\sqrt[3]{2}$ và $\log_{0,2}0,34$ **13)** $\log_9 80$ và $\log_2 5$ **14)** $\log_3 16$ và $\log_{16}729$

Bài 2: Xác định dấu của các biểu thức sau: $\mathbf{A}=\log_4\frac{1}{3}.\log_{\frac{1}{2}}5$ $\mathbf{B}=\log_{\frac{6}{5}}\frac{14}{9}.\log_{\frac{4}{7}}\frac{7}{2}.\log_{0,7}\frac{3}{7}$

Bài 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $\log_{b+c}a+\log_{c+a}b+\log_{a+b}c>\frac{3}{4}$ với $\forall a,b,c\in\left(\sqrt{2};2\right)$

2) $\log_4\left(1+4^a\right)>\log_9\left(2^a+9^a\right)$ với $a>0$

3) $\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)\ge 6$ với $\forall a,b,c\in\left(\frac{1}{4};1\right)$

Bài 4: Không sử dụng máy tính hãy chứng minh rằng

1) $\frac{3}{2}\log_3 29<2+\log_2 7$ **2)** $\log_3 7+\log_7 3>2$

Bài 5: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1) $y=(x^2-x-2)^e$ **2)** $y=(3-x-2x^2)^{\frac{3}{2}}$ **3)** $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ **4)** $y=(2^x-16)^{-3}$

5) $y=\log_{4-x^2}\dfrac{x-1}{x+1}$ **6)** $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x+5}}$ **7)** $y=\log_2\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ **8)** $y=\log\dfrac{x-1}{2x-3}$

9) $y=\sqrt{\log_{0,3}\left(\log_3\dfrac{x^2+2}{x+5}\right)}$ **10)** $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x+1}}-\log_2\sqrt{x^2-x-6}$ **11)** $y=\lg\left(-x^2+3x+4\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$

Bài 6: Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

1) $f(x)=e^{x^2-2x}$ trên đoạn $[0;3]$. 2) $f(x)=\ln(x+e)$ trên $[0;e]$.

3) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ trên đoạn $[1;3]$. 4) $f(x)=xe^{-x}$ trên đoạn $[0;2]$.

5) $f(x)=x^2e^x$ trên đoạn $[-1;2]$. 6) $f(x)=e^x(x^2-2x-2)$ trên đoạn $[1;4]$

7) $f(x)=(x-1)e^x$ trên đoạn $[-1;1]$. 8) $f(x)=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$.

9) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. 10) $f(x)=e^{2x}-4e^x+3$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

11) $f(x)=\dfrac{1}{3}\log^3_{\frac{1}{2}}x+\log^2_{\frac{1}{2}}x-3\log_{\frac{1}{2}}x+1$ trên $\left[\dfrac{1}{4};4\right]$.

Bài 7 : Tìm m để bất phương trình :

1) $4^x-3.2^{x+1}-m\ge 0$ có nghiệm với $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $(3m+1).12^x+(2-m).6^x+3^x<0$ có nghiệm với $\forall x>0$.

3) $4^x-2^x-m\ge 0$ có nghiệm với $\forall x\in(0;1)$

Bài 8 : Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ với $\forall x\ge 0$

2) $\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)<x$ với $\forall x>0$

3) $\dfrac{1}{a-b}\left(\ln\dfrac{a}{a-1}-\ln\dfrac{b}{b-1}\right)<4$ với $1<a<b$

Mọi ý kiến và đóng góp các bạn gửi về theo email: giasu.minhtam@yahoo.com

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ ĐỌC TÀI LIỆU !

PHẦN 2: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

(các bạn theo dõi ở bản tiếp theo…)